ALLA RICERCA DI π

Consideriamo una circonferenza di raggio unitario. Sappiamo che

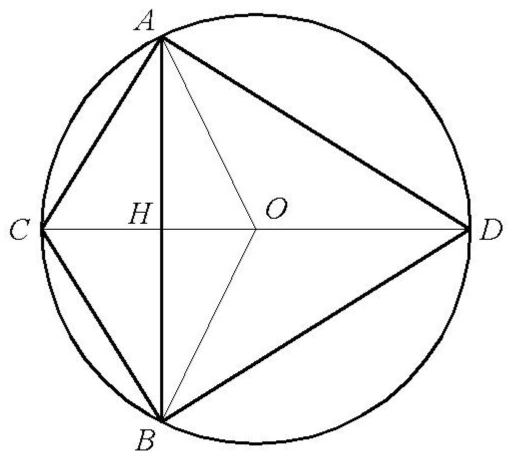
$$C = 2\pi r$$

Se $r = 1$, allora

$$C = 2\pi$$

Vogliamo determinare il valore di π come approssimazione per difetto del semiperimetro di una serie di poligoni regolari inscritti in una circonferenza di raggio unitario.

Consideriamo la figura seguente:



Sia data una corda $\overline{AB}$ di lunghezza x_n e si tracci un segmento perpendicolare ad $\overline{AB}$ passante per l'origine *O* che indichiamo con $\overline{CD}$. Vogliamo determinare la lunghezza dei segmenti

$$\overline{AC} = \overline{BC} = x_{2n}$$

$$\overline{AD} = \overline{BD} = x'_{2n}$$

Per il teorema di Pitagora possiamo scrivere:

$$\overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{AC}^2$$

$$\overline{OH}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{OA}^2$$

Se poniamo

$$\overline{OH} = y$$

risulta essere

$$\overline{CH} = 1 - y$$

essendo $\overline{OC}$ il raggio della circonferenza che per ipotesi è pari a uno. Sostituendo nelle due espressioni si ottiene:

$$(1-y)^2+\left(\frac{x_n}{2}\right)^2=x_{2n}^2$$

$$y^2+\left(\frac{x_n}{2}\right)^2=1$$

Dalla seconda delle due relazioni possiamo ricavare:

$$y^2=1-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2$$

ovvero

$$y=\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2}$$

Sviluppando il quadrato a primo membro nella prima espressione si ottiene invece:

$$y^2-2y+1=x_{2n}^2-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2$$

Sostituendo nell'espressione trovata i valori di y e y^2 determinati in precedenza si ha:

$$1-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2-2\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2}+1=x_{2n}^2-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2$$

Semplificando i termini comuni si ottiene:

$$2-2\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{2}\right)^2}=x_{2n}^2$$

cioè

$$x_{2n}^2=2-\sqrt{4-x_n^2}$$

e in definitiva

$$x_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-x_n^2}}$$

Guardando la figura si osserva poi che il triangolo *CAD* è rettangolo in *A*, pertanto possiamo scrivere:

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}$$

o meglio

$$x'_{2n} = \sqrt{2 + \sqrt{4 - x_n^2}}$$

Le due espressioni trovate possono essere semplificate ricordando che:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

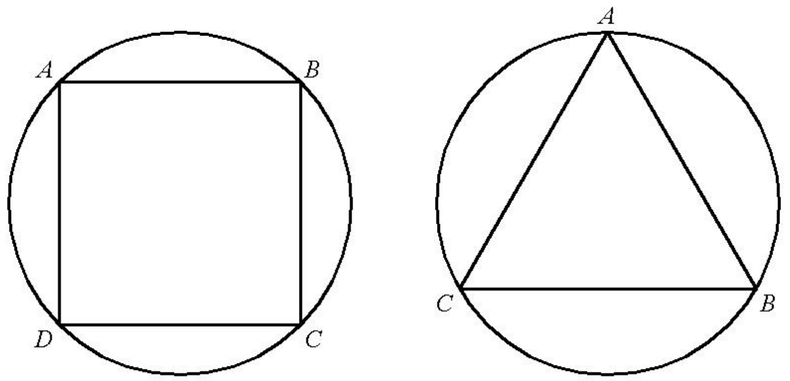
Si ottiene così in definitiva:

$$x_{2n} = \sqrt{1 + \frac{x_n}{2}} - \sqrt{1 - \frac{x_n}{2}} \qquad (1)$$

$$x'_{2n} = \sqrt{1 + \frac{x_n}{2}} + \sqrt{1 - \frac{x_n}{2}} \qquad (2)$$

Delle due espressioni trovate a noi serve solo la prima, infatti se la corda x_n rappresenta il lato di un poligono regolare di *n* lati, attraverso la (1) possiamo determinare la lunghezza del lato del poligono di 2*n* lati.

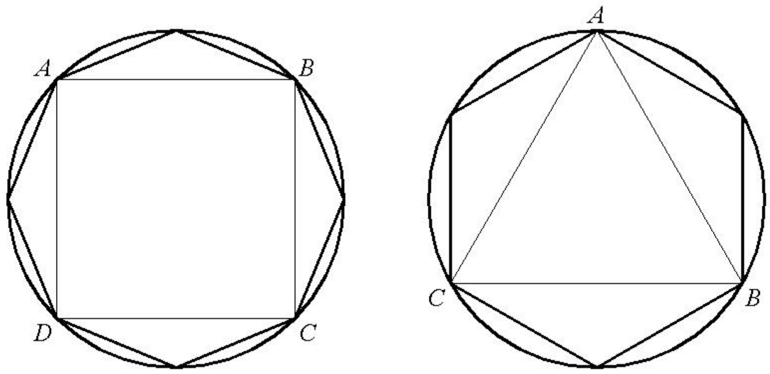
Passiamo allora a determinare il valore di π. Consideriamo il caso di un quadrato e di un triangolo equilatero inscritti in una circonferenza.



Se il raggio è unitario il lato del quadrato e del triangolo valgono rispettivamente $\sqrt{2} = 1{,}41...$ e $\sqrt{3} = 1{,}73...$ L'approssimazione per π nei due casi è pari al semiperimetro delle due figure inscritte, cioè:

Per il quadrato	Per il triangolo
$\pi > \frac{4}{2}\sqrt{2} = 2{,}83...$	$\pi > \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2{,}60...$

Trasformiamo ora le due figure precedenti in un ottagono ed in un esagono rispettivamente.



Grazie alla (1) possiamo determinare le lunghezze dei lati delle due figure che valgono rispettivamente:

$$x_8 = \sqrt{1+\frac{x_4}{2}} - \sqrt{1-\frac{x_4}{2}} = \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}765...$$

$$x_6 = \sqrt{1+\frac{x_3}{2}} - \sqrt{1-\frac{x_3}{2}} = \sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

L'approssimazione per π in questi altri due casi vale:

Per l'ottagono	Per l'esagono
$\pi > \frac{8}{2} 0{,}765... = 3{,}06...$	$\pi > \frac{6}{2} = 3{,}00...$

Aumentando ulteriormente il numero di lati si vede che il valore calcolato converge rapidamente a π. Per fare questo si può usare il programma Excel ed inserire i dati di partenza per il quadrato e il triangolo e l'espressione (1) per determinare la lunghezza del lato e il relativo semiperimetro che approssima il valore di π.

Come si vede dalla tabella sottostante, l'errore diminuisce all'aumentare del numero di lati la cui crescita è tra l'altro esponenziale.

Partendo dal quadrato inscritto dopo poche iterazioni si arriva ad un poligono di 524.288 lati che approssima il valore di π con un errore di circa $5 \cdot 10^{-12}$.

Se tentate di andare oltre l'Excel fornisce risultati errati, ciò è dovuto al fatto che la differenza tra il valore vero e quello calcolato comincia ad essere paragonabile alla precisione di macchina dei numeri rappresentati nel calcolatore.

QUADRATO				**TRIANGOLO**			
Lato	Poligono	Semiperimetro	Errore	Lato	Poligono	Semiperimetro	Errore
1,41421356	4	**2,82842712**	3,1317E-01	1,73205081	3	**2,59807621**	5,4352E-01
0,76536686	8	**3,06146746**	8,0125E-02	1,00000000	6	**3,00000000**	1,4159E-01
0,39018064	16	**3,12144515**	2,0148E-02	0,51763809	12	**3,10582854**	3,5764E-02
0,19603428	32	**3,13654849**	5,0442E-03	0,26105238	24	**3,13262861**	8,9640E-03
0,09813535	64	**3,14033116**	1,2615E-03	0,13080626	48	**3,13935020**	2,2425E-03
0,04908246	128	**3,14127725**	3,1540E-04	0,06543817	96	**3,14103195**	5,6070E-04
0,02454308	256	**3,14151380**	7,8852E-05	0,03272346	192	**3,14145247**	1,4018E-04
0,01227177	512	**3,14157294**	1,9713E-05	0,01636228	384	**3,14155761**	3,5046E-05
0,00613591	1.024	**3,14158773**	4,9283E-06	0,00818121	768	**3,14158389**	8,7614E-06
0,00306796	2.048	**3,14159142**	1,2321E-06	0,00409061	1.536	**3,14159046**	2,1904E-06
0,00153398	4.096	**3,14159235**	3,0802E-07	0,00204531	3.072	**3,14159211**	5,4759E-07
0,00076699	8.192	**3,14159258**	7,7005E-08	0,00102265	6.144	**3,14159252**	1,3690E-07
0,00038350	16.384	**3,14159263**	1,9250E-08	0,00051133	12.288	**3,14159262**	3,4225E-08
0,00019175	32.768	**3,14159265**	4,8109E-09	0,00025566	24.576	**3,14159265**	8,5544E-09
0,00009587	65.536	**3,14159265**	1,1984E-09	0,00012783	49.152	**3,14159265**	2,1370E-09
0,00004794	131.072	**3,14159265**	2,9616E-10	0,00006392	98.304	**3,14159265**	5,3263E-10
0,00002397	262.144	**3,14159265**	6,3334E-11	0,00003196	196.608	**3,14159265**	1,3973E-10
0,00001198	524.288	**3,14159265**	5,1266E-12	0,00001598	393.216	**3,14159265**	4,1506E-11

www.carlocalo.it