Problema

Un recipiente a base quadrata di lato $l = 40\,cm$ deve contenere delle sfere d'acciaio, aventi diametro $D = 10\,cm$, immerse in un olio lubrificante.

Quante sfere possono essere completamente coperte da 200 litri di olio?

❖

Questo quesito può trarre in inganno chiunque se non si analizza bene il problema. Infatti se consideriamo il volume occupato da una singola sfera si avrebbe:

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \pi\frac{D^3}{6} \tag{1}$$

essendo $D = 10\,cm = 1\,dm$, la (1) da:

$$V_{sfera} = \frac{\pi}{6}\,litri \tag{2}$$

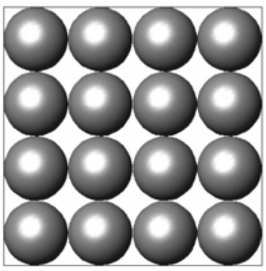

fig. 1 – Disposizione sfere in strati da 16

disponendo le sfere in file di 4x4 (fig. 1), si avrebbe per ogni strato un volume di olio pari a:

$$V_{olio} = V_{recipiente} - 16\cdot V_{sfera} = 16 - 16\cdot\frac{\pi}{6} = 16\left(1-\frac{\pi}{6}\right)litri \tag{3}$$

con 200 litri di olio si riuscirebbero a coprire quindi:

$$N_{strati} = int\left(\frac{200}{16\left(1-\frac{\pi}{6}\right)}\right) = 26 \quad (4)$$

a cui corrispondono:

$$N_{sfere} = 16 \cdot N_{strati} = 416 . \quad (5)$$

In realtà è possibile una diversa disposizione delle sfere alternando strati da 16 con strati da 9. Si perdono così 7 sfere negli strati pari ma si guadagna in altezza a causa del posizionamento di ogni sfera nella parte compresa fra le quattro sottostanti (fig. 2).

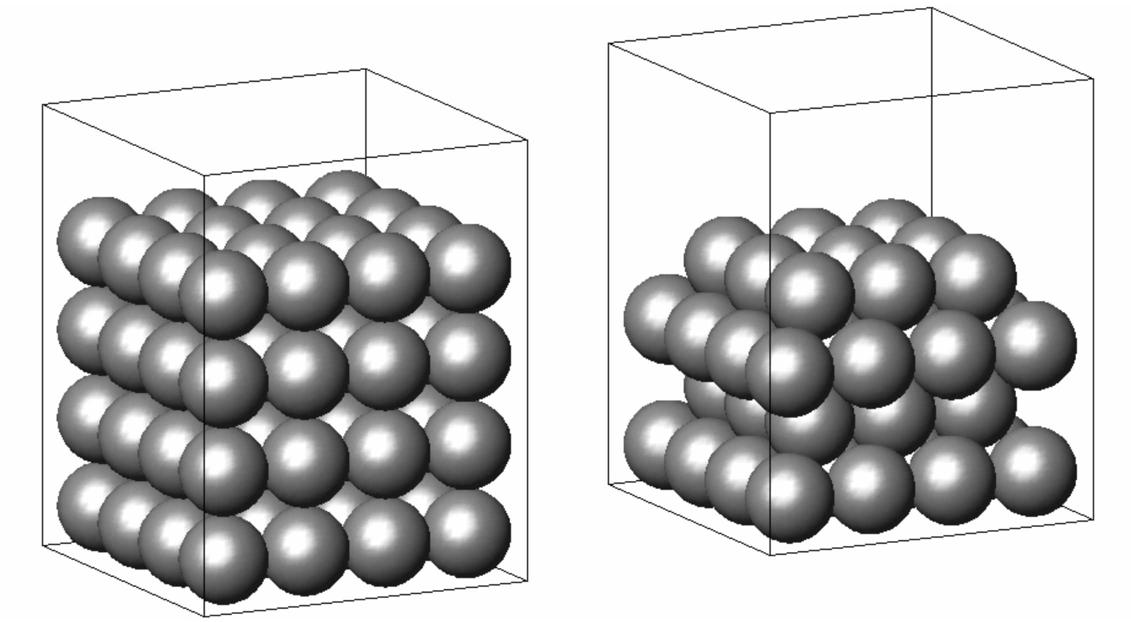

fig. 2 – Disposizioni possibili delle sfere

Dobbiamo verificare se questa seconda disposizione è conveniente in base alle richieste del problema.

Nella prima disposizione, ogni strato ha un'altezza di $10\,cm$, nel secondo caso invece dobbiamo determinare la distanza ortogonale al piano orizzontale fra i centri di due sfere giacenti su strati contigui.

Osservando la fig. 3, si comprende che i centri di cinque sfere si trovano sui vertici di una piramide a base quadrata di spigoli aventi lunghezza pari a $10cm$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo *ADC*, si ricava un'altezza:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}\sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\,cm\,. \tag{6}$$

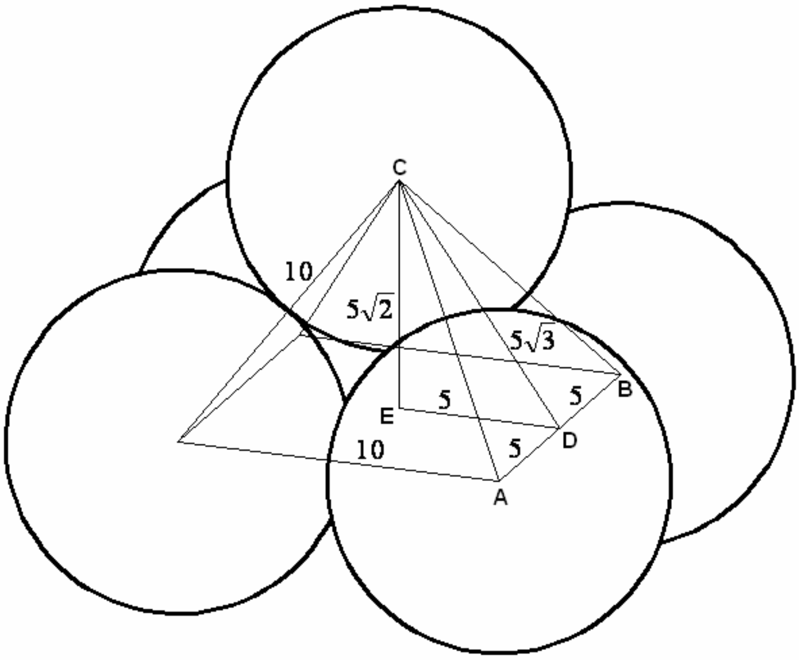

fig. 3 – Piramide con vertici nei centri delle sfere

Noto il lato *CD*, in modo analogo si ricava il lato *CE* del triangolo *CED*:

$$CE = \sqrt{CD^2 - DE^2}\sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 - 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,cm \tag{7}$$

che corrisponde alla distanza fra due piani di sfere nella disposizione a strati alternati 16 e 9 di fig. 2.

Se ipotizziamo di riempire il recipiente all'inizio con uno strato di 16 sfere, si avrà una situazione come quella rappresentata in fig. 4. Cioè, ad un primo strato di altezza $5cm$ formato da 16 semisfere, seguiranno ulteriori strati intermedi alti $5\sqrt{2}\,cm$ costituiti da

25 semisfere, per concludere con uno strato sempre alto $5cm$ e formato da 9 o 16 semisfere a seconda se il numero totale degli strati sia pari o dispari rispettivamente.

Si ha dunque:

Primo Strato

$$V_{olioPS} = V_{recipiente} - \frac{16}{2} \cdot V_{sfera} = 16 \cdot 0{,}5 - 8 \cdot \frac{\pi}{6} = 8 - \frac{4}{3}\pi \, litri \tag{8}$$

Strato Successivo

$$V_{olioSS} = V_{recipiente} - \frac{25}{2} \cdot V_{sfera} = 16 \cdot 0{,}5\sqrt{2} - \frac{25}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = 8\sqrt{2} - \frac{25}{12}\pi \, litri \tag{9}$$

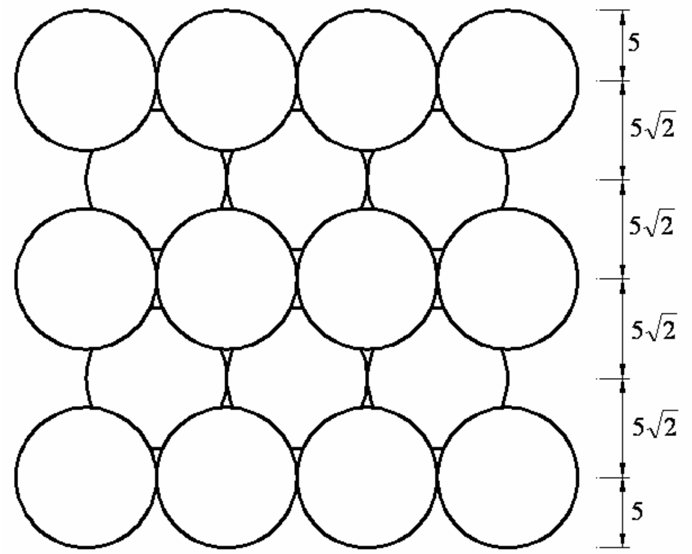

fig. 4 – Distanze ortogonali fra i centri delle sfere

Ultimo Strato

$$V_{olioUS(npari)} = V_{recipiente} - \frac{9}{2} \cdot V_{sfera} = 16 \cdot 0{,}5 - \frac{9}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = 8 - \frac{9}{12}\pi \, litri \tag{10}$$

oppure

$$V_{olioUS(ndispari)} = V_{recipiente} - \frac{16}{2} \cdot V_{sfera} = 16 \cdot 0{,}5 - 8 \cdot \frac{\pi}{6} = 8 - \frac{4}{3}\pi \, litri \tag{11}$$

Sommando il volume dell'olio del primo e dell'ultimo strato si ha:

$$V_{olioPS+US(npari)} = 16 - \frac{25}{12}\pi \, litri \tag{12}$$

oppure

$$V_{olioPS+US(ndispari)} = 16 - \frac{8}{3}\pi \, litri \tag{13}$$

in definitiva, con 200 *litri* di olio dovrà essere:

$$(n-1) \cdot V_{olioSS} + V_{olioPS+US} \leq 200 \, litri \tag{14}$$

cioè

$$n \leq \frac{200 - V_{olioPS+US} + V_{olioSS}}{V_{olioSS}} \tag{15}$$

dove n è il numero di strati.

Supponiamo che n sia pari, dalla (15) si ha allora:

$$n \leq \frac{200 - 16 + \frac{25}{12}\pi + 8\sqrt{2} - \frac{25}{12}\pi}{8\sqrt{2} - \frac{25}{12}\pi} = \frac{184 + 8\sqrt{2}}{8\sqrt{2} - \frac{25}{12}\pi} \cong 40{,}95 \tag{16}$$

e quindi con 200 *litri* di olio possiamo ricoprire almeno 40 strati a cui corrispondono:

$$N_{sfere} = 20 \cdot 16 + 20 \cdot 9 = 20 \cdot 25 = 500 \tag{17}$$

Se invece supponiamo che n sia dispari, allora la (15) diventa:

$$n \le \frac{200 - 16 + \frac{8}{3}\pi + 8\sqrt{2} - \frac{25}{12}\pi}{8\sqrt{2} - \frac{25}{12}\pi} = \frac{184 + 8\sqrt{2} + \frac{7}{12}\pi}{8\sqrt{2} - \frac{25}{12}\pi} \cong 41{,}34 \tag{18}$$

L'intero dispari più vicino al valore determinato nella (18) è 41 che è maggiore del valore (40) trovato nel caso n fosse pari e fornisce un numero di sfere pari a:

$$N_{sfere} = 21 \cdot 16 + 20 \cdot 9 = 516 \tag{19}$$

Riepilogando con 41 strati di sfere avremo un'altezza complessiva, data da:

$$h_{totale} = 10 + 20 \cdot 10\sqrt{2} = 10\left(1 + 20\sqrt{2}\right) cm \tag{20}$$

a cui corrisponderà un volume del recipiente uguale a:

$$V_{recipiente} = 16 \cdot h_{totale} = 16\left(1 + 20\sqrt{2}\right) litri \tag{21}$$

il volume occupato dalle sfere sarà invece:

$$V_{sfere} = N_{sfere} \cdot V_{sfera} = 516 \cdot \frac{\pi}{6} = 86\pi \; litri \tag{22}$$

Quindi il volume dell'olio necessario per coprire tutte le sfere è:

$$V_{olio} = V_{recipiente} - V_{sfere} = 16\left(1 + 20\sqrt{2}\right) - 86\pi = 198{,}37 \, litri \tag{23}$$

La fig. 5 mostra in scala la situazione in entrambi i casi analizzati.

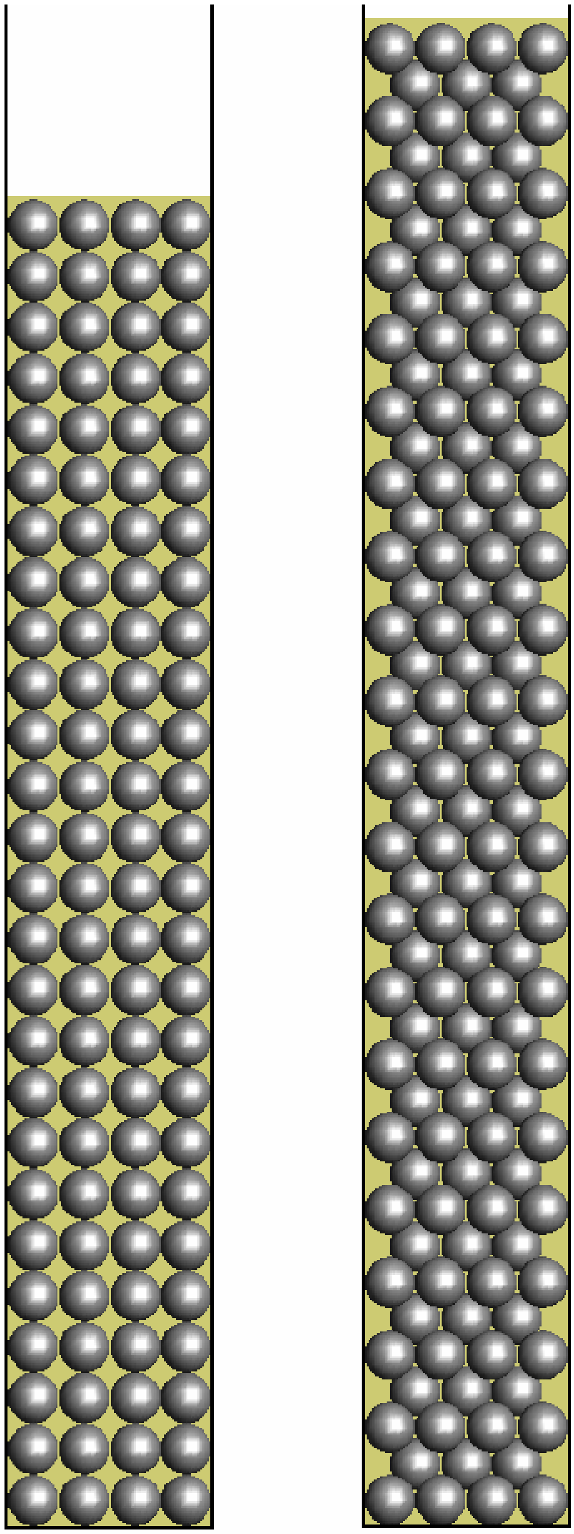

fig. 5 – Sfere immerse in 200 litri di olio