UNA MEMORIA FORMIDABILE

Qualche tempo fa un alunno mi propose un gioco che doveva mettere in evidenza la sua memoria formidabile. Dapprima mi chiese di pensare ad un numero compreso tra 1 e 100 e successivamente mi mostrò alcune cartelle in cui erano stampati casualmente dei numeri in ordine crescente sempre nello stesso intervallo; a quel punto mi chiese di indicare in quali cartelle il numero da me pensato fosse presente e non appena risposi l'alunno immediatamente lo indovinò.

Inizialmente rimasi stupito dalla velocità della risposta ma nello stesso tempo non riuscii a credere che quell'alunno avesse un memoria tale da ricordare tutti quei numeri in base alla loro presenza o meno nelle varie cartelle.

Immaginai vi fosse qualche trucco e cominciai ad osservare con attenzione le cartelle; dopo un certo tempo capii finalmente la tecnica con cui i numeri erano stati disposti nelle cartelle.

Ho trovato davvero interessante quel gioco e voglio proporvelo fornendovi anche la spiegazione matematica; anzi ho voluto crearne una variante più complessa in modo da depistare anche l'occhio più attento.

Alla fine di questo articolo troverete delle tavole che potrete stampare e così stupire gli amici con la vostra *Memoria Formidabile*.

La risposta a quel trucco si trova nella *rappresentazione binaria* di un numero. In genere quando rappresentiamo un numero usiamo la *base decimale* che consiste nell'usare i dieci simboli 0, 1, 2, …, 9 (chiamati *cifre*) ai quali viene assegnato un peso (*valore*). Quando il numero da rappresentare non è esprimibile attraverso una sola cifra allora se ne aggiunge un'altra a sinistra della prima ottenendo così numeri a due cifre per un totale di cento combinazioni, se poi il numero da rappresentare è ancora più grande se ne usano tre e così via fino ad ottenere infinite possibilità.

I numeri 362 e 623 pur usando le stesse cifre hanno valori diversi in quanto la rappresentazione è *posizionale*, cioè il valore della cifra dipende dalla posizione in cui si trova.

Formalmente possiamo scrivere che un numero N è dato da:

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot 10^k = c_0 \cdot 10^0 + c_1 \cdot 10^1 + c_2 \cdot 10^2 + \ldots + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} \tag{1}$$

dove i c_k sono le *n* cifre che costituiscono il numero.

Per esempio il numero $N = 362$ di tre cifre si può scrivere:

$$362 = 2 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 = 2 + 60 + 300 \tag{2}$$

Oltre a quella decimale si possono usare altre basi che contengono un numero di cifre maggiore o minore di dieci. Nel caso il numero di cifre sia inferiore a dieci per comodità si usano gli stessi simboli della base decimale, se invece le cifre sono in numero maggiore di dieci è necessario introdurre nuovi simboli. Per esempio nel sistema *esadecimale* (a base 16) oltre ai soliti dieci simboli 0, 1, …, 9 si usano le lettere A, B, C, D, E ed F ai quali vengono assegnati rispettivamente i valori 10, 11, 12, 13, 14 e 15.

Ad esempio il numero $N = (3A6F)_{16}$ vale:

$$(3A6F)_{16} = 15 \cdot 16^0 + 6 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^3 = (14959)_{10} \tag{3}$$

In generale possiamo dire che per rappresentare attraverso la (1) un numero N in una determinata base b, useremo b simboli c_k con $0 \le c_k \le b-1$, cioè:

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot b^k = c_0 \cdot b^0 + c_1 \cdot b^1 + c_2 \cdot b^2 + \ldots + c_{n-1} \cdot b^{n-1} \tag{4}$$

La rappresentazione più semplice è quella binaria, cioè quella che usa un sistema di numerazione a base 2 con cifre 0 e 1 ed è usata negli elaboratori, calcolatrici, microprocessori ecc.

Ad esempio il numero $N = (101101)_2$ vale 45 nella base 10, infatti:

$$(101101)_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 4 + 8 + 32 = (45)_{10} \tag{5}$$

Nel sistema di numerazione a base 10 sappiamo inoltre che con tre cifre, ad esempio, si possono rappresentare 1000 numeri i cui valori sono compresi tra 0 e 999, cioè fissato un certo numero N di cifre, è possibile rappresentare 10^N valori compresi tra $0 \div 10^N - 1$. Analogamente in base 2 con N cifre si potranno rappresentare 2^N valori compresi tra $0 \div 2^N - 1$.

Supponiamo di avere quattro cifre binarie, cioè $N = 4$ e riportiamo in tabella le varie combinazioni ordinate secondo le potenze crescenti di 2, si ha:

n.	**2^3**	**2^2**	**2^1**	**2^0**
	8	**4**	**2**	**1**
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Costruiamo ora quattro cartelle, una per ogni colonna delle potenze di 2, contenenti i numeri decimali che hanno in corrispondenza un segno "1" nella colonna considerata, si ha:

2^3	**2^2**	**2^1**	**2^0**
8	**4**	**2**	**1**
9	**5**	**3**	**3**
10	**6**	**6**	**5**
11	**7**	**7**	**7**
12	**12**	**10**	**9**
13	**13**	**11**	**11**
14	**14**	**14**	**13**
15	**15**	**15**	**15**

Possiamo osservare due cose:

- Il primo numero di ogni cartella è pari alla potenza corrispondente (es. $2^3 = 8$).
- Un numero è presente nella cartella solo se nella sua rappresentazione la potenza relativa è moltiplicata per un fattore "1" (es. $5 = 2^2 + 2^0 = 4 + 1$)

In definitiva una volta pensato il numero, in questo caso dovrà essere compreso tra 1 e 15, per scoprirlo è sufficiente farsi indicare in quali cartelle si trova (possono anche essere mostrate in modo casuale) sommando a mente i primi numeri di ogni cartella quando la risposta è affermativa.

Ad esempio se il numero da indovinare è il 13, le cartelle contenenti tale numero saranno quelle che cominciano con 8, 4 ed 1; quindi $8 + 4 + 1 = 13$.

Se vogliamo estendere il gioco ad un numero massimo più grande bisogna costruire tante cartelle quanti sono le cifre necessarie per la rappresentazione del numero più grande. Ad esempio se il gioco si estende nell'intervallo $1 \div 100$ avremo bisogno di N cartelle tali che:

$$2^N - 1 \geq 100 \tag{6}$$

cioè

$$N \geq log_2 101 = 6{,}658... \tag{7}$$

Il più piccolo valore intero che soddisfa la (7) è

$$N = 7 \tag{8}$$

cioè dovremo costruire sette cartelle.

Vediamo se è possibile estendere il gioco con una base diversa da quella binaria. Supponiamo di usare un sistema a base 3: in tal caso la questione si complica apparentemente in quanto i fattori moltiplicativi delle potenze di tre sono 0, 1 e 2.

Per semplicità immaginiamo di usare tre cifre in base 3, cioè $N = 3$; si hanno così $3^N = 27$ combinazioni per rappresentare tutti i numeri compresi nell'intervallo $0 \div 26$.

Costruiamo, come fatto in precedenza, una tabella di tutte le combinazioni possibili.

n.	3^2	3^1	3^0
	9	**3**	**1**
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	0	2
3	0	1	0
4	0	1	1
5	0	1	2
6	0	2	0
7	0	2	1
8	0	2	2
9	1	0	0
10	1	0	1
11	1	0	2
12	1	1	0
13	1	1	1
14	1	1	2
15	1	2	0
16	1	2	1
17	1	2	2
18	2	0	0
19	2	0	1
20	2	0	2
21	2	1	0
22	2	1	1
23	2	1	2
24	2	2	0
25	2	2	1
26	2	2	2

Questa volta dobbiamo costruire due cartelle per ogni potenza di 3, per un totale di sei cartelle, a seconda se il fattore moltiplicativo vale "2" o "1" rispettivamente. Le cartelle, anche in questo caso, conterranno il rispettivo valore decimale.

3^2	3^2	3^1	3^1	3^0	3^0
18	9	6	3	2	1
19	10	7	4	5	4
20	11	8	5	8	7
21	12	15	12	11	10
22	13	16	13	14	13
23	14	17	14	17	16
24	15	24	21	20	19
25	16	25	22	23	22
26	17	26	23	26	25

Per analogia col caso binario possiamo dire:

- Il primo numero di ogni cartella è pari alla potenza corrispondente moltiplicata per il relativo fattore moltiplicativo (es. $2 \cdot 3^2 = 18$ oppure $1 \cdot 3^2 = 9$).
- Un numero è presente nella cartella solo se nella sua rappresentazione la potenza relativa è moltiplicata per il fattore corrispondente (ad esempio il numero $17 = 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 9 + 6 + 2$).

In definitiva usando la base 3, si opera in maniera analoga a quanto fatto per quella binaria: si invita un giocatore a pensare, in questo caso, un numero compreso tra 1 e 26 e di indicare in quali cartelle si trova; sommando le prime cifre delle cartelle selezionate otterrete il numero pensato.

In allegato a questo documento, troverete due gruppi di cartelle, il primo usa sette tavole, lavora in base binaria e permette di scegliere un numero compreso tra 1 e 100; il secondo gruppo contenente dieci tavole è stato realizzato in base ternaria e permette di scegliere numeri compresi tra 1 e 200.

Potete stamparle e ritagliarle ma vi consiglio di esercitarvi mnemonicamente a fare i calcoli prima di proporre il gioco ai vostri amici e mostrar loro la vostra memoria formidabile.

Buon divertimento.

www.carlocalo.it

64 65 66 67 68 69	32 33 34 35 36 37	16 17 18 19 20 21	8 9 10 11 12 13 14
70 71 72 73 74 75	38 39 40 41 42 43	22 23 24 25 26 27	15 24 25 26 27 28
76 77 78 79 80 81	44 45 46 47 48 49	28 29 30 31 48 49	29 30 31 40 41 42
82 83 84 85 86 87	50 51 52 53 54 55	50 51 52 53 54 55	43 44 45 46 47 56
88 89 90 91 92 93	56 57 58 59 60 61	56 57 58 59 60 61	57 58 59 60 61 62
94 95 96 97 98 99	62 63 96 97 98 99	62 63 80 81 82 83	63 72 73 74 75 76
100	100	84 85 86 87 88 89	77 78 79 88 89 90
		90 91 92 93 94 95	91 92 93 94 95

4 5 6 7 12 13 14 15	2 3 6 7 10 11 14 15	1 3 5 7 9 11 13 15	
20 21 22 23 28 29	18 19 22 23 26 27	17 19 21 23 25 27	
30 31 36 37 38 39	30 31 34 35 38 39	29 31 33 35 37 39	
44 45 46 47 52 53	42 43 46 47 50 51	41 43 45 47 49 51	
54 55 60 61 62 63	54 55 58 59 62 63	53 55 57 59 61 63	
68 69 70 71 76 77	66 67 70 71 74 75	65 67 69 71 73 75	
78 79 84 85 86 87	78 79 82 83 86 87	77 79 81 83 85 87	
92 93 94 95 100	90 91 94 95 98 99	89 91 93 95 97 99	

162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200	81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161	54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161

27 28 29 30 31 32 33 34 35 36	18 19 20 21 22 23 24 25 26 45	9 10 11 12 13 14 15 16 17 36
37 38 39 40 41 42 43 44 45 46	46 47 48 49 50 51 52 53 72 73	37 38 39 40 41 42 43 44 63 64
47 48 49 50 51 52 53 108 109	74 75 76 77 78 79 80 99 100	65 66 67 68 69 70 71 90 91 92
110 111 112 113 114 115 116	101 102 103 104 105 106 107	93 94 95 96 97 98 117 118 119
117 118 119 120 121 122 123	126 127 128 129 130 131 132	120 121 122 123 124 125 144
124 125 126 127 128 129 130	133 134 153 154 155 156 157	145 146 147 148 149 150 151
131 132 133 134 189 190 191	158 159 160 161 180 181 182	152 171 172 173 174 175 176
192 193 194 195 196 197 198	183 184 185 186 187 188	177 178 179 198 199 200
199 200		

6 7 8 15 16 17 24 25 26 33 34	3 4 5 12 13 14 21 22 23 30 31	2 5 8 11 14 17 20 23 26 29 32
35 42 43 44 51 52 53 60 61 62	32 39 40 41 48 49 50 57 58 59	35 38 41 44 47 50 53 56 59 62
69 70 71 78 79 80 87 88 89 96	66 67 68 75 76 77 84 85 86 93	65 68 71 74 77 80 83 86 89 92
97 98 105 106 107 114 115	94 95 102 103 104 111 112	95 98 101 104 107 110 113
116 123 124 125 132 133 134	113 120 121 122 129 130 131	116 119 122 125 128 131 134
141 142 143 150 151 152 159	138 139 140 147 148 149 156	137 140 143 146 149 152 155
160 161 168 169 170 177 178	157 158 165 166 167 174 175	158 161 164 167 170 173 176
179 186 187 188 195 196 197	176 183 184 185 192 193 194	179 182 185 188 191 194 197
		200

1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34 37 40 43 46 49 52 55 58 61 64 67 70 73 76 79 82 85 88 91 94 97 100 103 106 109 112 115 118 121 124 127 130 133 136 139 142 145 148 151 154 157 160 163 166 169 172 175 178 181 184 187 190 193 196 199		