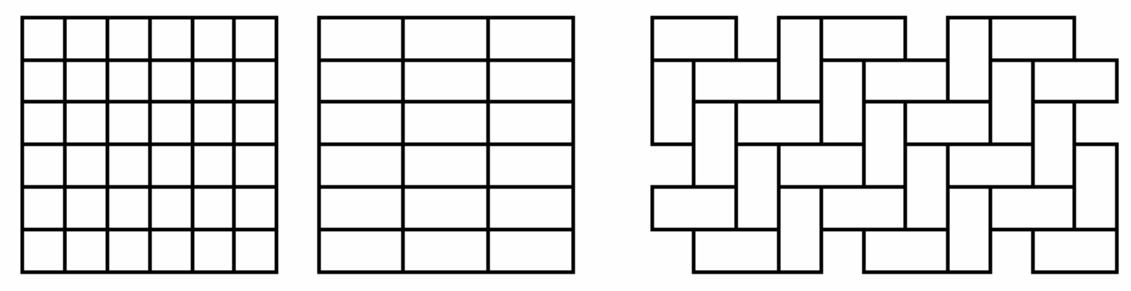
# LA GEOMETRIA NELLE PIASTRELLE

Supponiamo di dover pavimentare delle superfici molto estese e vogliamo evitare le classiche composizioni quadrate, rettangolari o a “spina di pesce”, per rendere meno banale la disposizione dei mattoni.

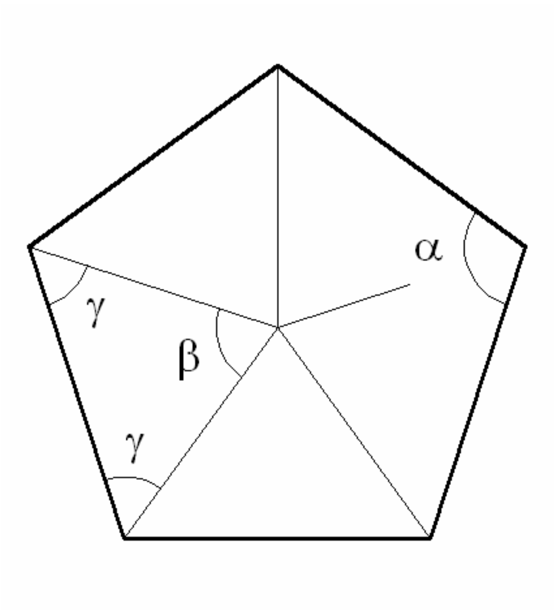


Esistono ovviamente un’infinità di possibili combinazioni, basti pensare ad esempio alle pavimentazioni eseguite a mosaico ma in tal caso ci vuole un’abilità artistica che non è certo appannaggio dei comuni operatori del settore.
D’altra parte un progettista può disegnare una qualunque figura, frutto della sua fantasia e successivamente farla realizzare con mattoni tagliati in modo opportuno; un simile modo di operare però fa lievitare i costi in modo sensibile.
Vogliamo vedere se è possibile, utilizzando forme geometriche elementari, creare delle disposizioni diverse da quelle viste nella figura precedente e più articolate.
Voglio premettere che questo approccio di studio serve per cercare di individuare tutte le possibili disposizioni realizzabili, anche se devo ammettere che oltre a quelle mostrate in questo articolo, sicuramente ce ne saranno altre.
Infatti mentre cercavo di dare delle forme alle composizioni, ogni tanto ne scaturiva qualcun’altra e quindi non sono sicuro di averle trovate tutte.
Quando parliamo di forme geometriche elementari ci riferiamo a poligoni regolari, cioè poligoni con tutti i lati e gli angoli uguali; ad esempio non sarà preso in considerazione il rettangolo.
Supporre che i poligoni siano regolari rende possibile un approccio matematico al problema e ci permette di stabilire almeno quali siano le condizioni necessarie affinché un tentativo di pavimentazione possa essere realizzato.
Cominciamo con l’osservare che un poligono regolare può essere pensato come formato da tanti triangoli isosceli quanti sono il numero dei suoi lati (vedi figura). Poiché la

somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180 gradi, si determina facilmente il valore dell'angolo interno dalla seguente relazione:

$$\alpha = 2\gamma = 180 - \beta = 180 - \frac{360}{n} \qquad (1)$$

dove *n* è il numero dei lati.




La tabella seguente mostra, ad esempio, tutti i valori degli angoli dei poligoni regolari fino a 20 lati che forniscono un risultato intero determinato con la (1).

| n | α |
|---|---|
| 3 | 60 |
| 4 | 90 |
| 5 | 108 |
| 6 | 120 |
| 8 | 135 |
| 9 | 140 |
| 10 | 144 |
| 12 | 150 |
| 15 | 156 |
| 18 | 160 |
| 20 | 162 |

Come si può osservare l'angolo più piccolo è dato dal triangolo ed è pari a 60 gradi e man mano che il numero dei lati aumenta il suo valore tende a 180 gradi, essendo infatti:

$$\lim_{n\to\infty} 180 - \frac{360}{n} = 180 \tag{2}$$

Se indichiamo con $p$ il numero di piastrelle facenti capo ad un vertice della pavimentazione, ad ogni vertice non potranno far capo meno di tre piastrelle (con due dovrebbero avere dimensioni infinite) e al massimo dovranno essere tali comunque da coprire l'intero angolo giro di 360 gradi. Quest'ultima situazione si verifica con il poligono avente l'angolo più piccolo, cioè il triangolo, quindi avremo:

$$p = \frac{360}{60} = 6 \tag{3}$$

In definitiva, per ogni spigolo, sarà possibile far convergere un numero di piastrelle pari a:

$$3 \le p \le 6 \tag{4}$$

Per combinare $p$ piastrelle attorno ad un vertice la somma degli angoli deve coprire l'intero angolo giro. Generalizzando il problema e utilizzando la (1), dovremo determinare i valori di $n_k$ che soddisfino la seguente relazione:

$$\left(180 - \frac{360}{n_1}\right) + \left(180 - \frac{360}{n_2}\right) + \ldots + \left(180 - \frac{360}{n_p}\right) = 360 \tag{5}$$

cioè

$$\frac{360}{n_1} + \frac{360}{n_2} + \ldots + \frac{360}{n_p} = 180p - 360 \tag{6}$$

e in definitiva

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_p}=\frac{p}{2}-1 \qquad (7)$$

con $p$ variabile secondo la (4).

L'espressione (7) deve essere soddisfatta per valori interi degli $n_k$ che forniscono il numero dei lati dei $p$ poligoni. Inoltre tale espressione è, come vedremo, condizione necessaria ma non sufficiente affinché possa realizzarsi una pavimentazione, infatti la sua soluzione permette la copertura dell'angolo di 360 gradi sicuramente in un punto, ma ciò non garantisce la mancata presenza di sovrapposizioni o di spazi vuoti.

Utilizzando il programma Excel è possibile risolvere per tentativi l'espressione precedente al variare di $p$. Si hanno i seguenti risultati:

| $p$ = 3 | | |
|---|---|---|
| 3 | 7 | 42 |
| 3 | 8 | 24 |
| 3 | 9 | 18 |
| 3 | 10 | 15 |
| 3 | 12 | 12 |
| 4 | 5 | 20 |
| 4 | 6 | 12 |
| 4 | 8 | 8 |
| 5 | 5 | 10 |
| 6 | 6 | 6 |

| $p$ = 4 | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 4 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 6 |
| 3 | 4 | 4 | 6 |
| 4 | 4 | 4 | 4 |

| $p$ = 5 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 3 | 6 |
| 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |

| $p$ = 6 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

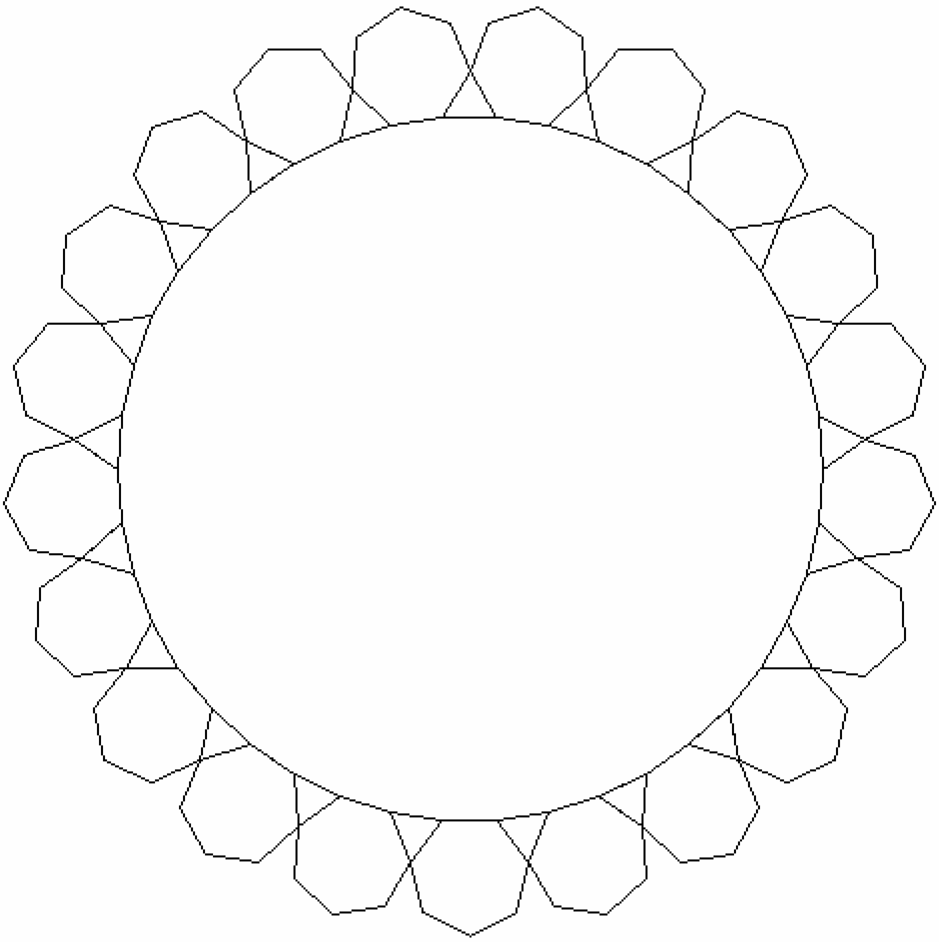
Si hanno così in totale 17 casi possibili che analizzeremo uno per uno per vedere se è possibile realizzare delle pavimentazioni continue senza sovrapposizioni o spazi vuoti.

Chiameremo *cella elementare* l'insieme di piastrelle che riescono a coprire spigolo per spigolo il poligono più grande e parleremo di *interferenza* in genere, sia per indicare la presenza di sovrapposizioni che di spazi vuoti. Nei casi in cui vi saranno interferenze potremo limitarci a realizzare solo dei rosoni.

Cominciamo con la prima colonna che riguarda la combinazione di tre piastrelle.

# 3-7-42

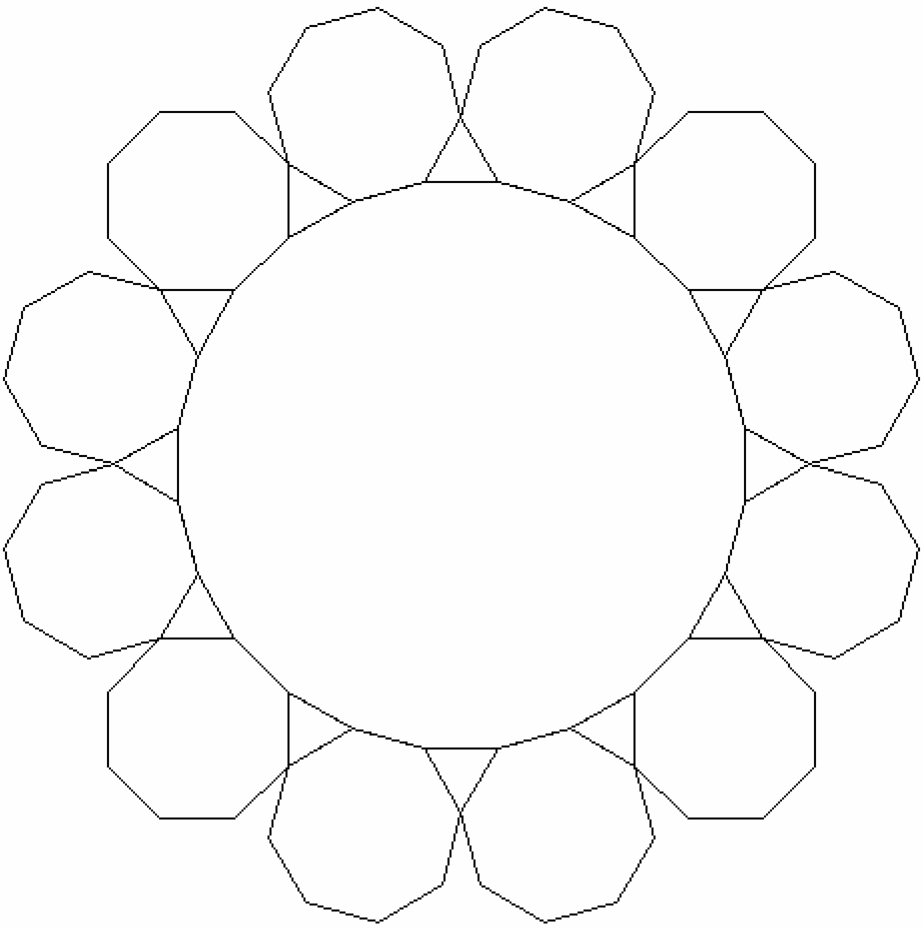
Unendo insieme un triangolo, un ettagono ed un poligono a 42 lati, si ottiene la seguente cella elementare:



Questa configurazione, come si può osservare, è incompatibile per la realizzazione di pavimentazioni perché l'angolo opposto al vertice del triangolo incastrato fra i due ettagoni è minore di 60 gradi e quindi non consente l'inserimento di una piastrella di forma regolare.

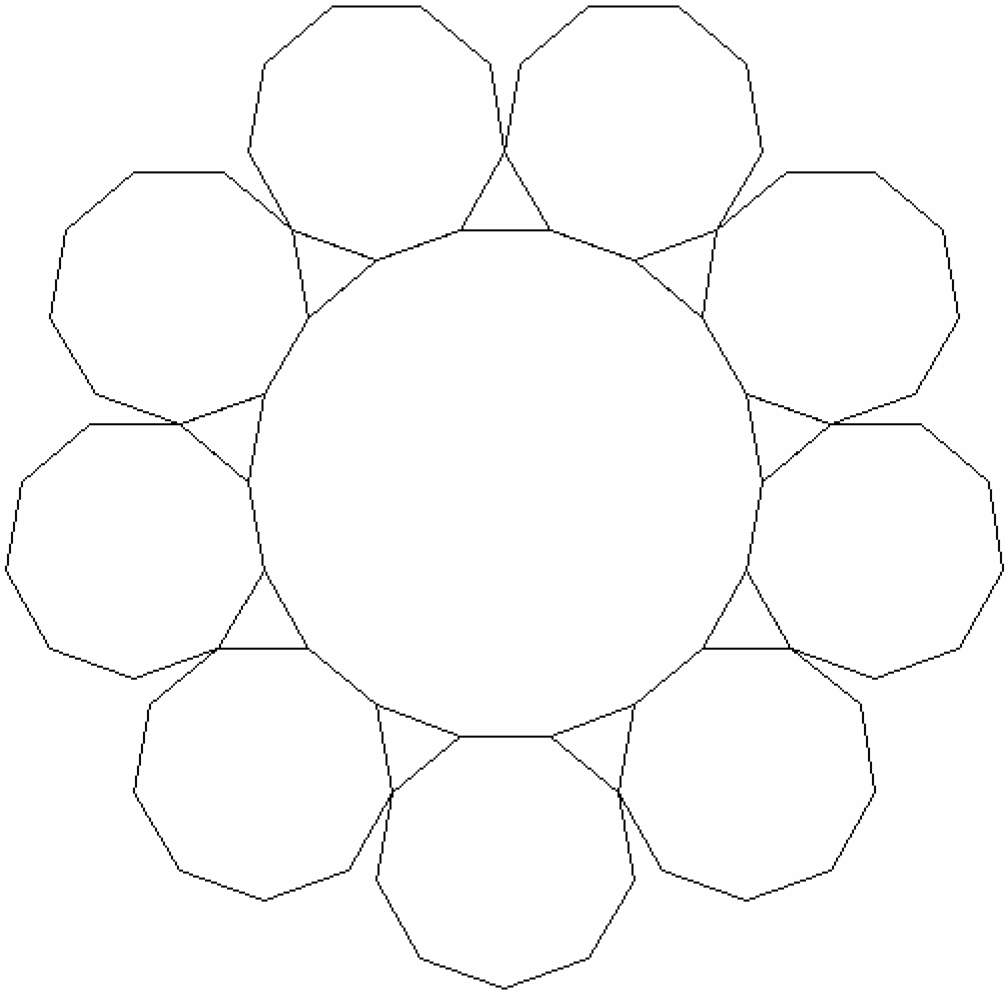
# 3-8-24

Anche questa configurazione ricade nel caso precedente. Infatti il triangolo, l'ottagono e il poligono a 24 lati possono essere uniti insieme solo per formare la cella elementare.



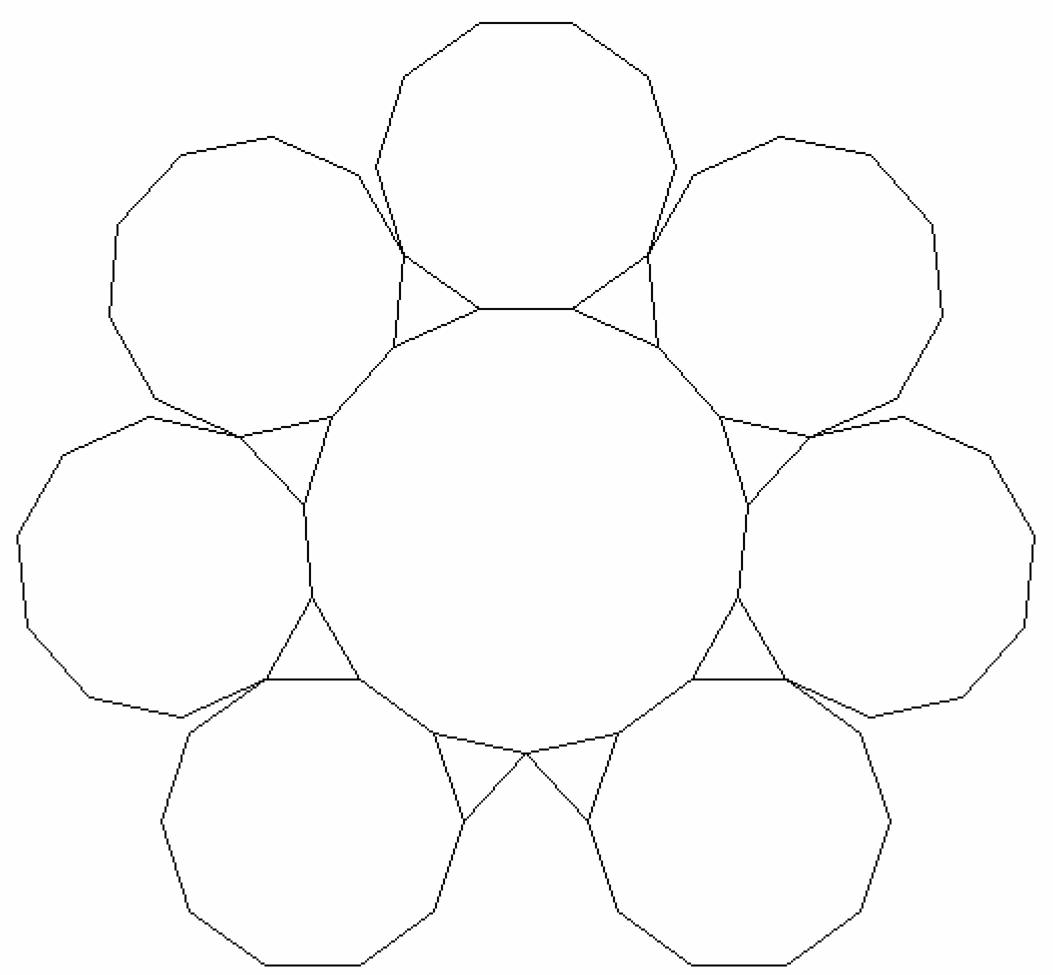
# 3-9-18

Anche per questa configurazione vale quanto detto per i due casi precedenti.



# 3-10-15

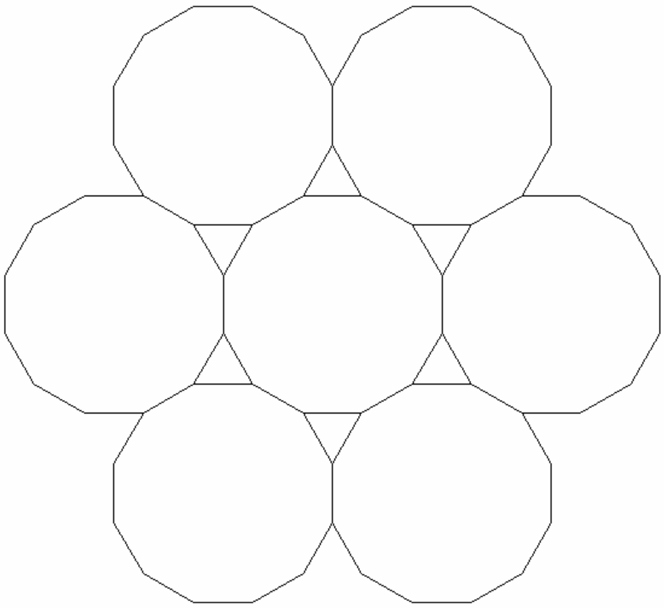
Qui la situazione è anche peggiore, infatti la presenza di un numero di lati dispari nel poligono maggiore, non consente nemmeno una chiusura simmetrica della cella elementare.



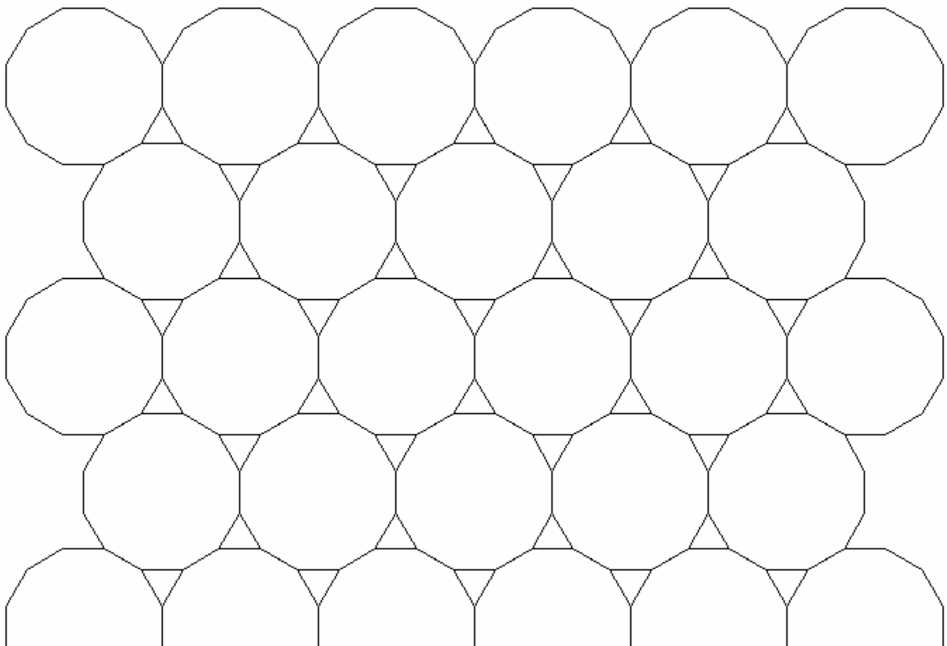
# 3-12-12

Finalmente troviamo una prima configurazione compatibile. Unire ogni spigolo di un dodecagono con un triangolo ed un altro dodecagono, crea una cella elementare che può essere riprodotta nel piano senza nessuna interferenza tra vuoti e pieni.

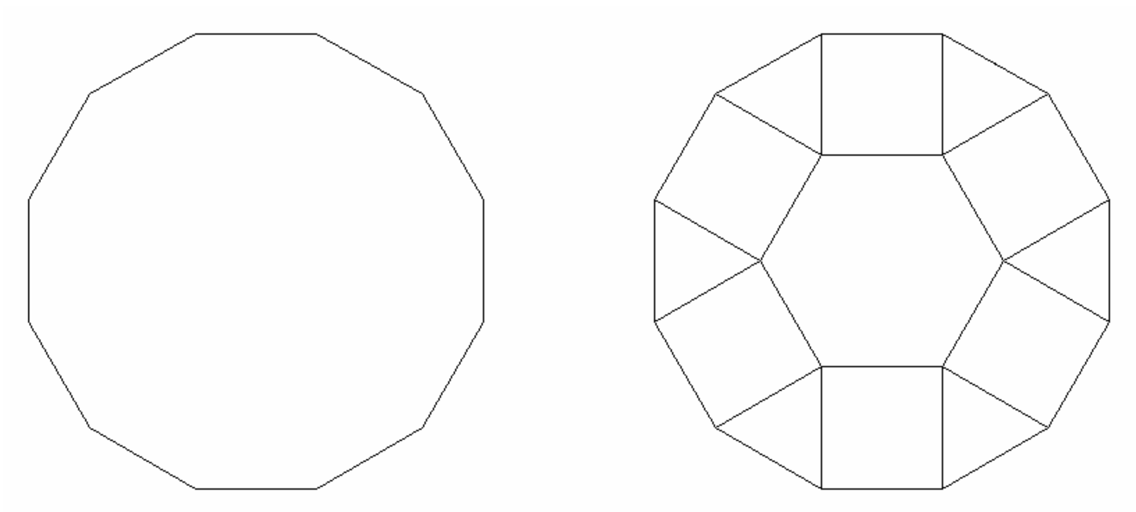
La figura sottostante mostra la cella elementare:



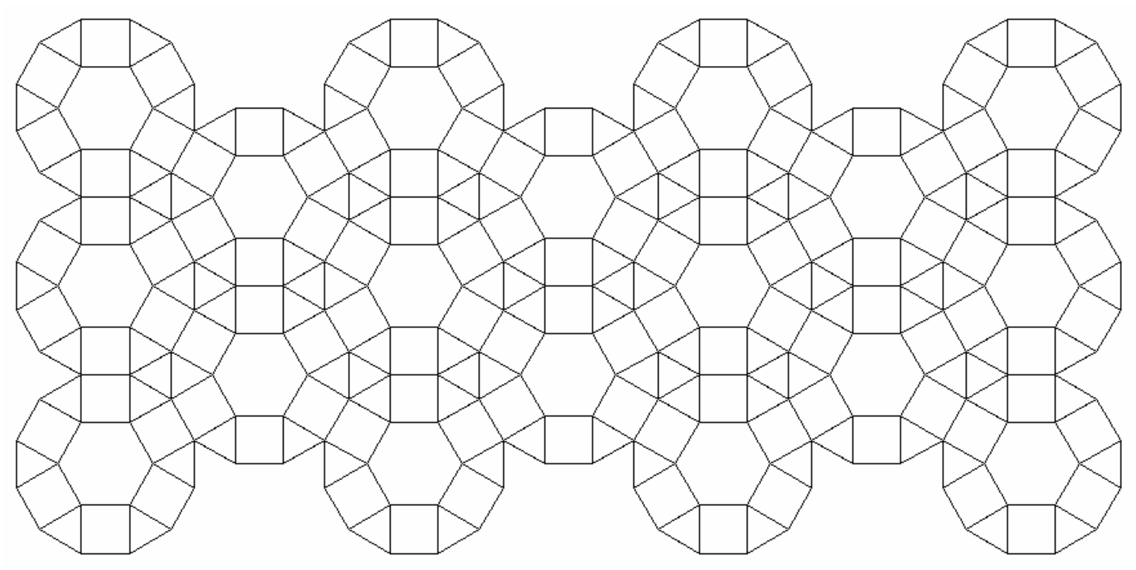
e la successiva una pavimentazione realizzata con tali poligoni.



Tuttavia non credo esistano in commercio piastrelle a forma di dodecagono ma il poligono a 12 lati può essere costruito anche con una piastrella esagonale, sei quadrati e altrettanti triangoli.

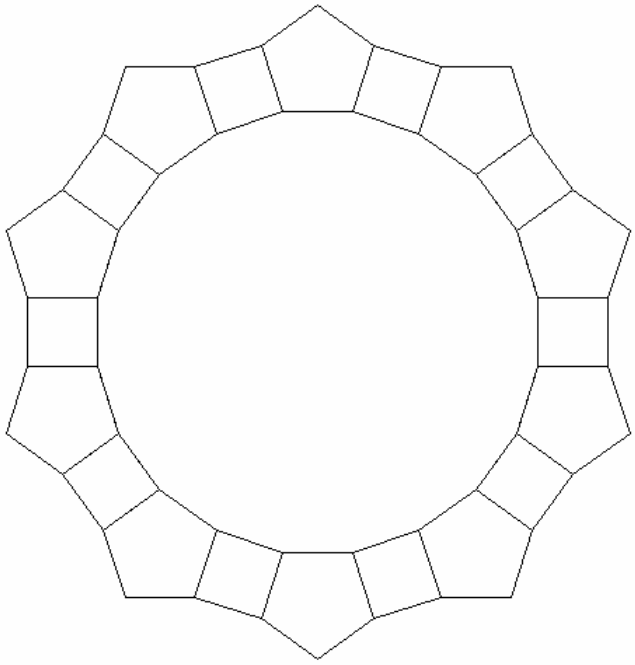


Il pavimento 3-12-12 assume allora la forma seguente, decisamente più fantasiosa rispetto alla precedente.

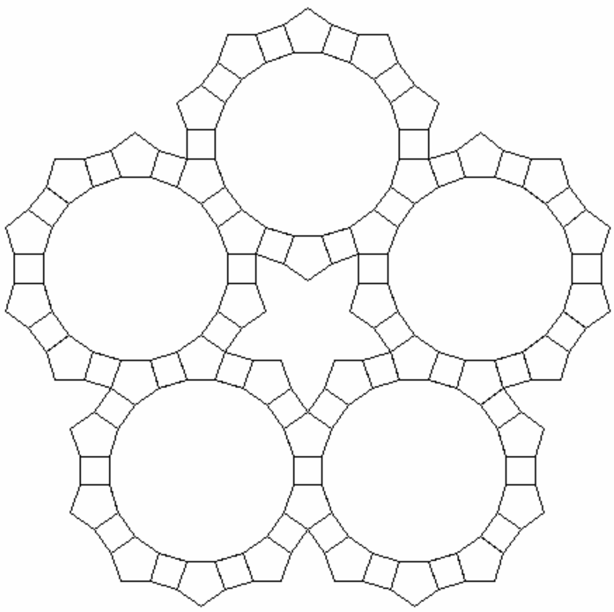


# 4-5-20

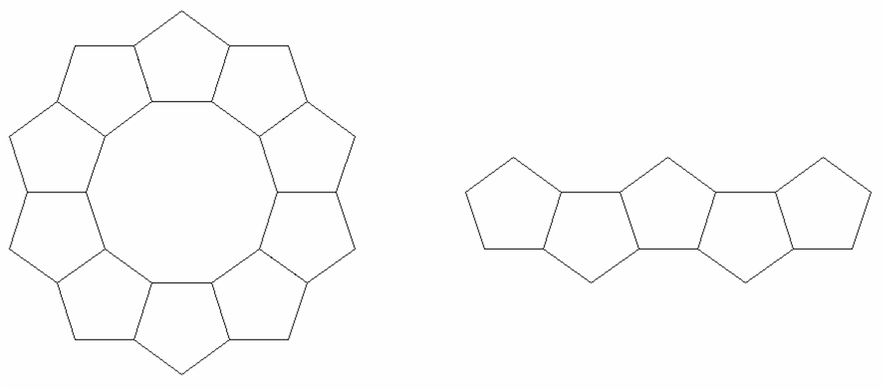
Disporre un quadrato, un pentagono ed un poligono a 20 lati genera una cella apparentemente compatibile, perché l'esterno combacia con un altro poligono a 20 lati.



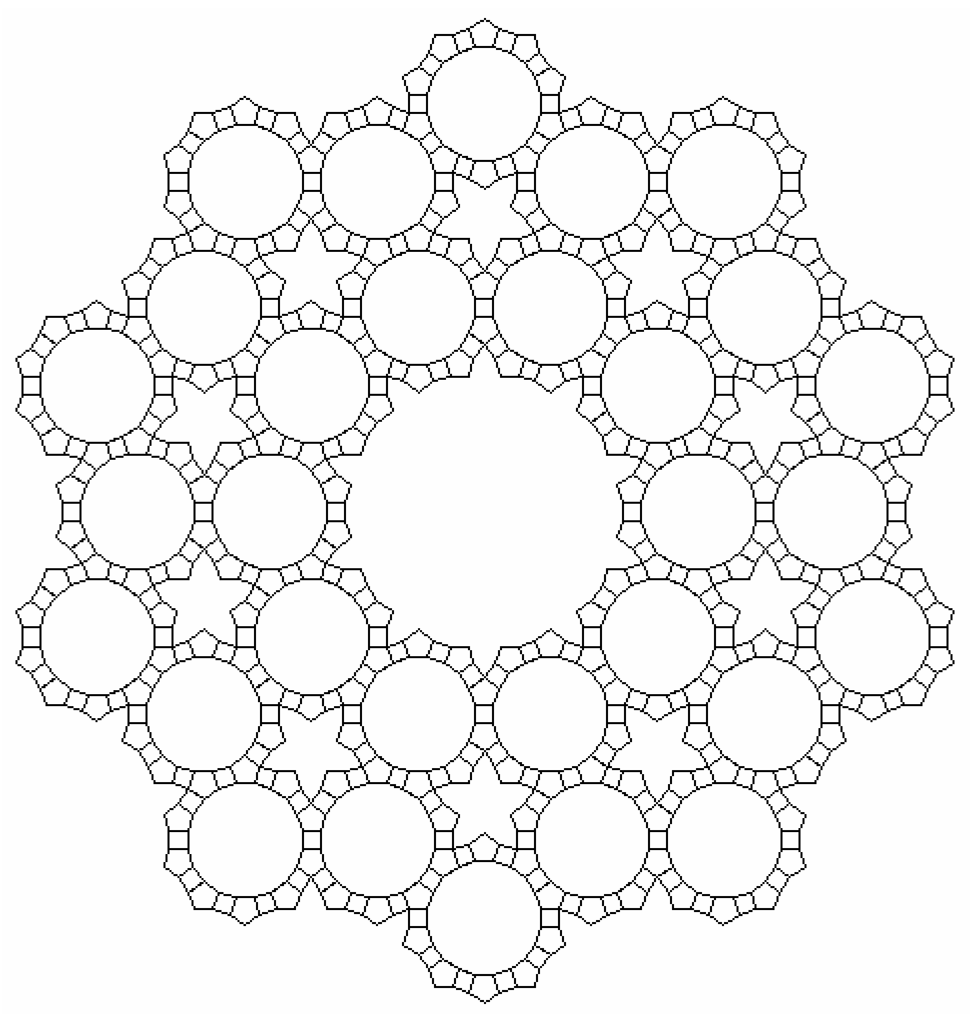
Se proviamo a riprodurre più celle elementari nel piano però si hanno delle interferenze. Si può disporre la cella elementare a forma pentagonale nel modo seguente, ma si ha una parte centrale vuota a forma di stella a 5 punte.



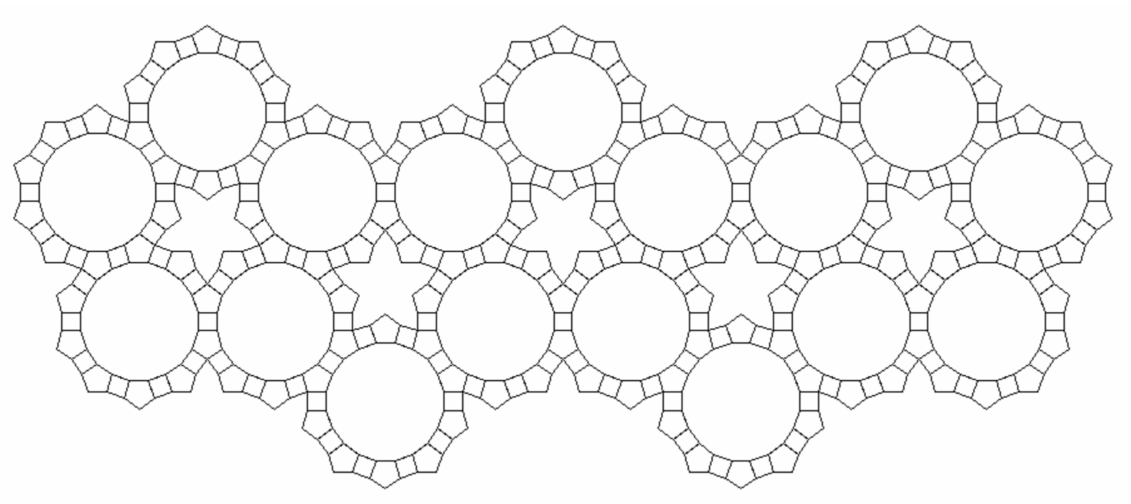
Se consideriamo la figura precedente a sua volta come una cella elementare, essa può essere a sua volta ripetuta nei due modi seguenti:



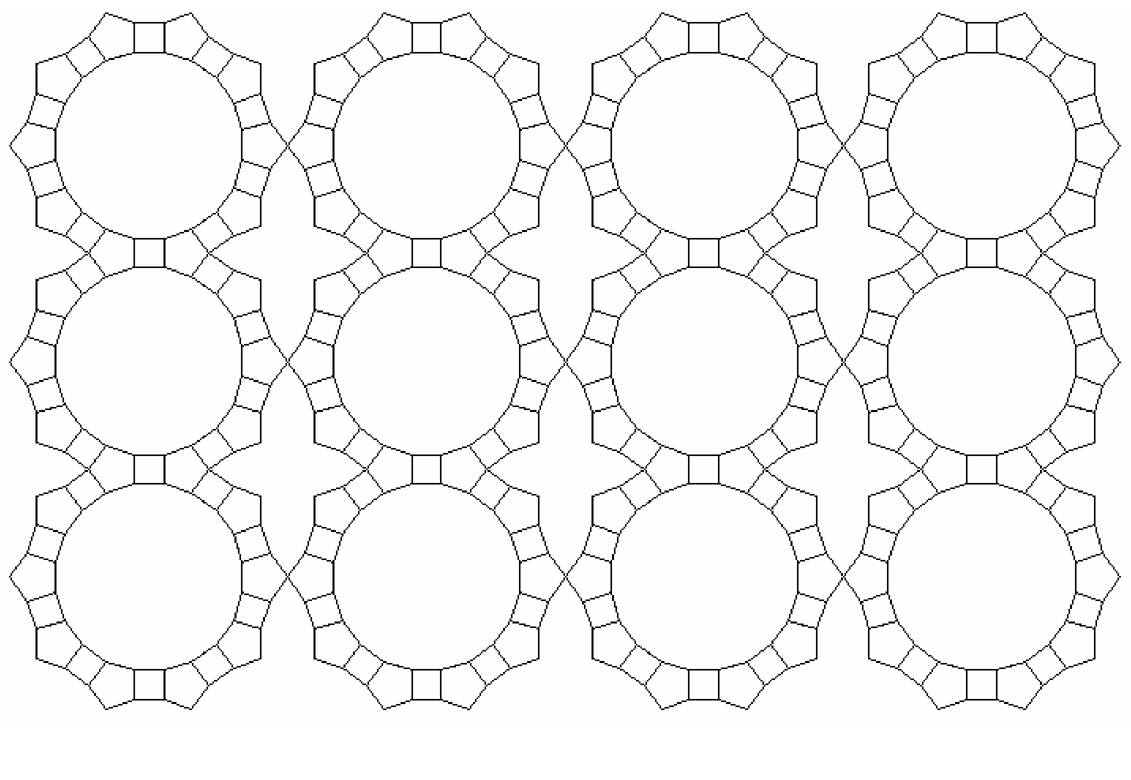
dalla prima si ottiene questa composizione:



e dalla seconda la figura sottostante:



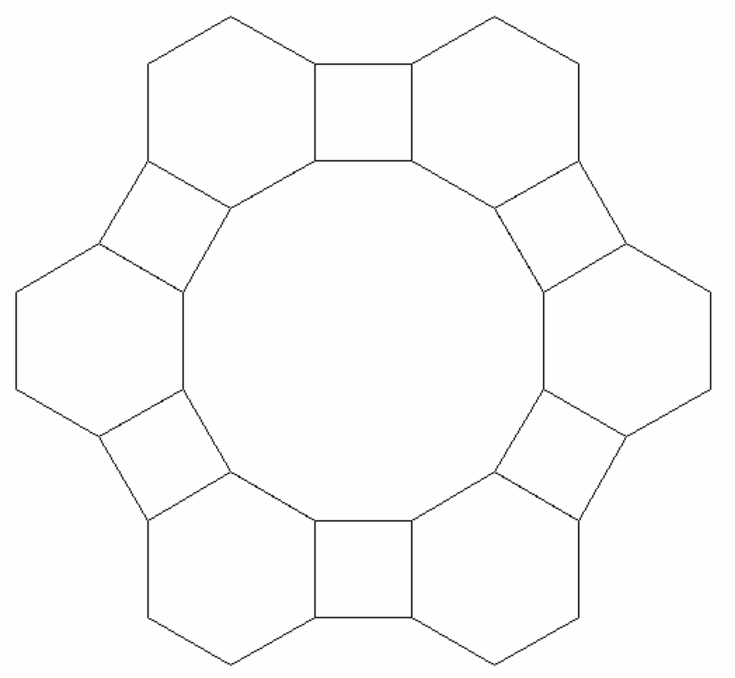
Se infine vogliamo disporre in modo regolare la cella elementare si ha la pavimentazione seguente:



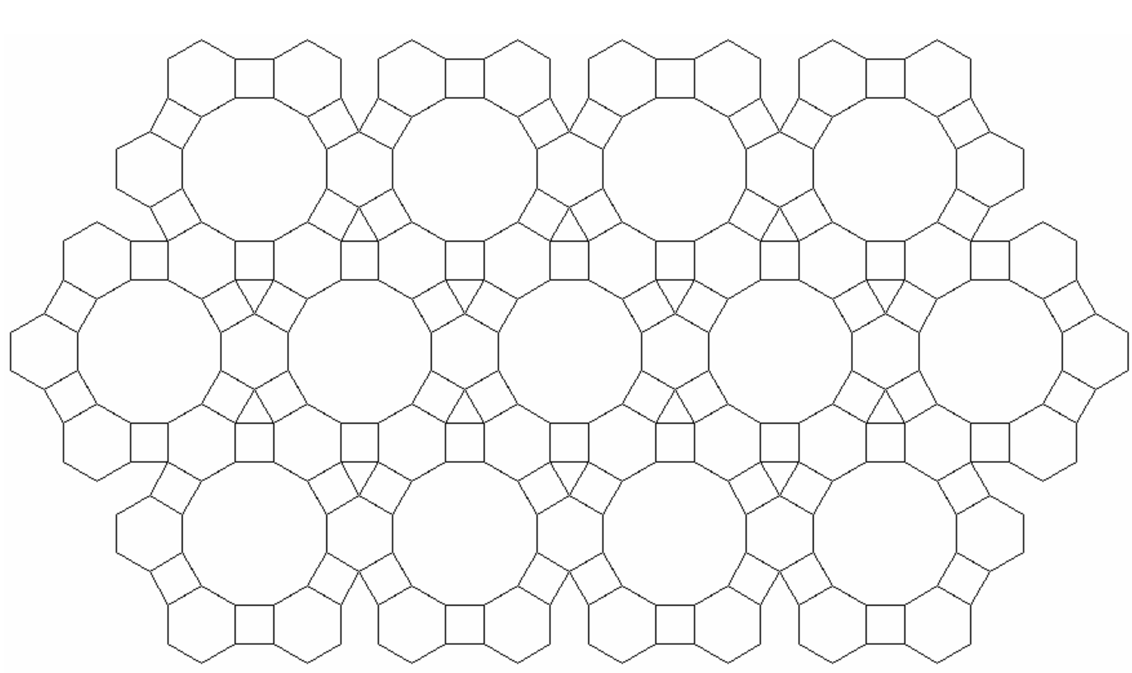
Forse è possibile creare altre disposizioni, ma ci saranno sempre dei vuoti o delle sovrapposizioni.

# 4-6-12

Questa configurazione non è compatibile, infatti utilizzando il quadrato, l'esagono e il dodecagono si formano delle interferenze (vuoti) che però hanno forma triangolare e pertanto la chiusura della figura è possibile. La figura sottostante mostra la cella elementare:

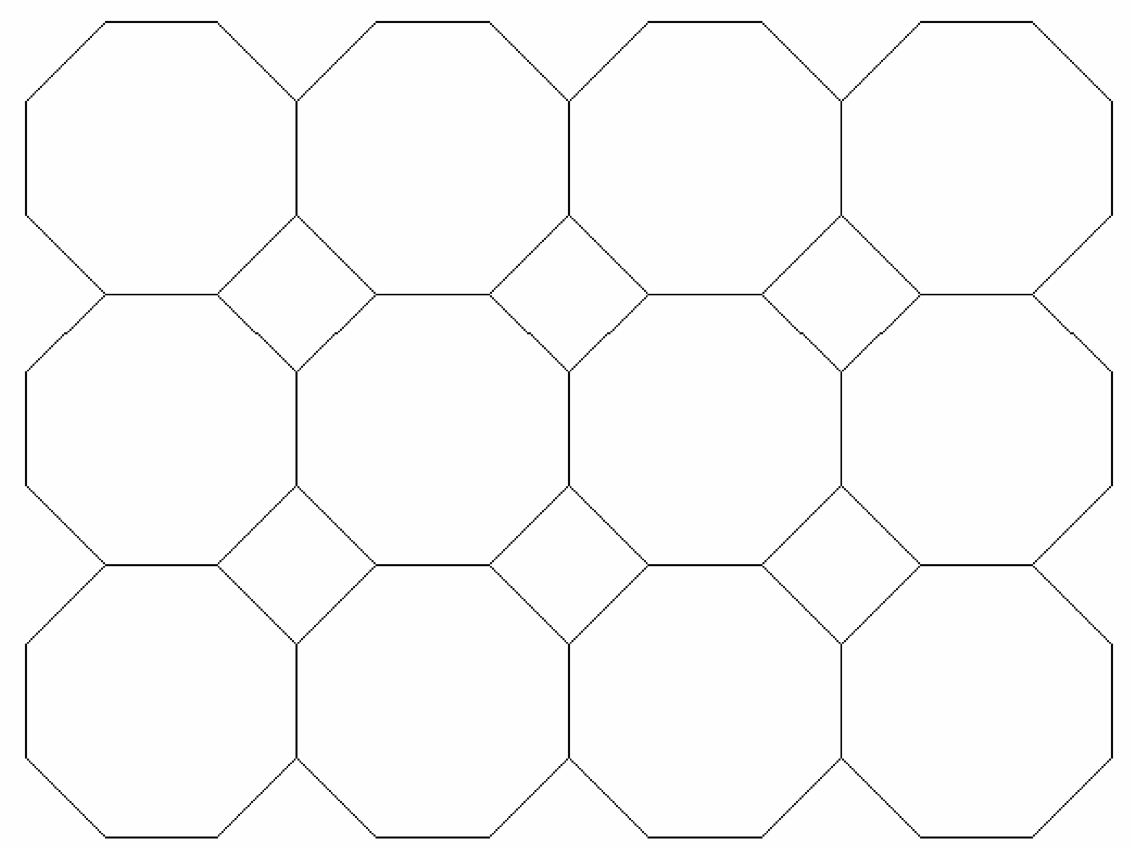


mentre quella seguente mostra la relativa pavimentazione:



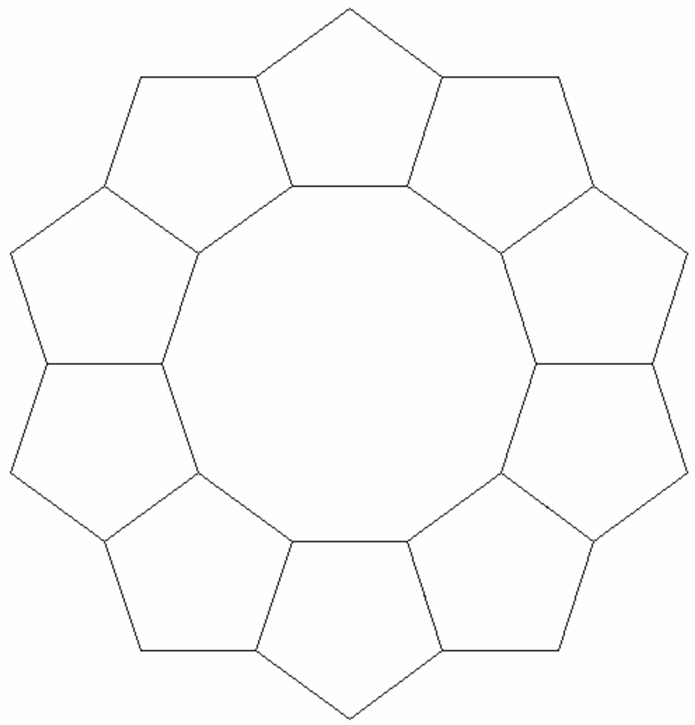
# 4-8-8

Questa configurazione è compatibile ed è molto usata. Alcune case produttrici la propongono nei loro cataloghi ma non risulta particolarmente accattivante.

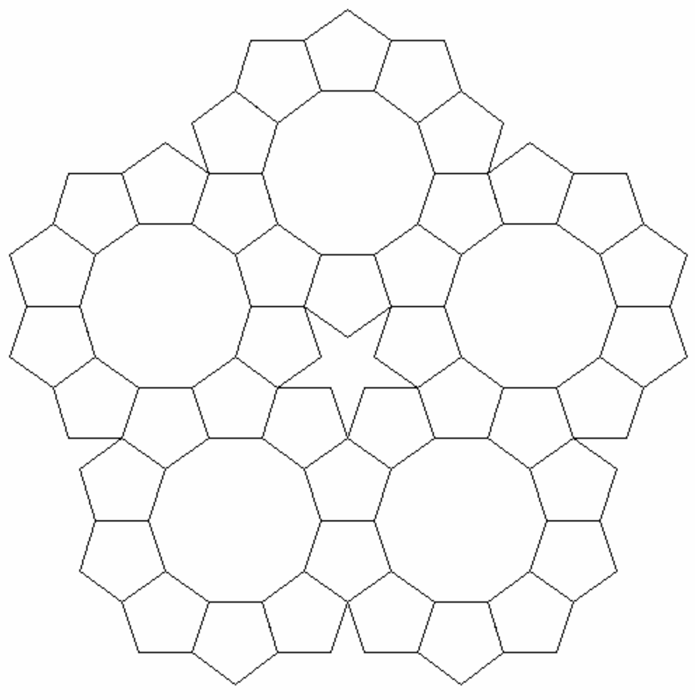


# 5-5-10

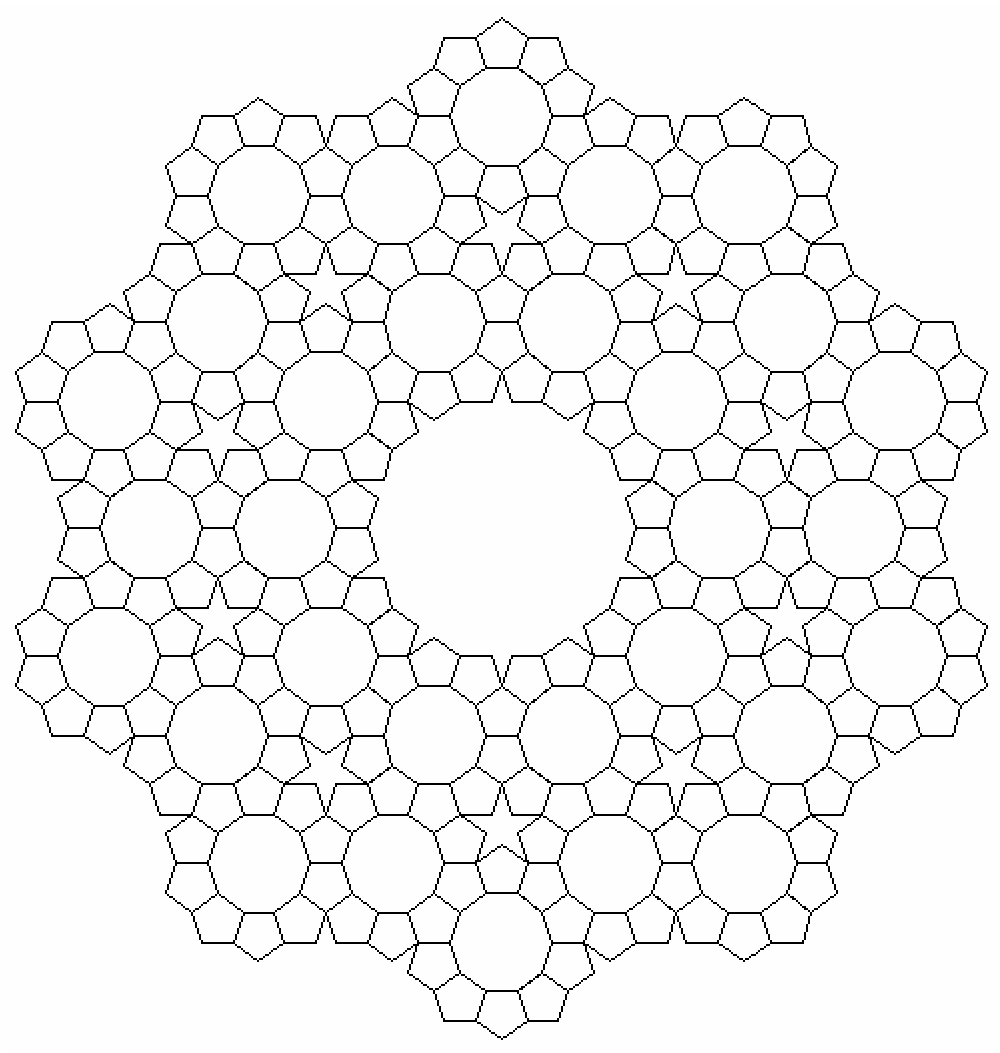
Questa configurazione è incompatibile. La cella elementare che si ottiene raggruppando sullo spigolo di ogni decagono due pentagoni non consente riproduzioni prive di interferenze.

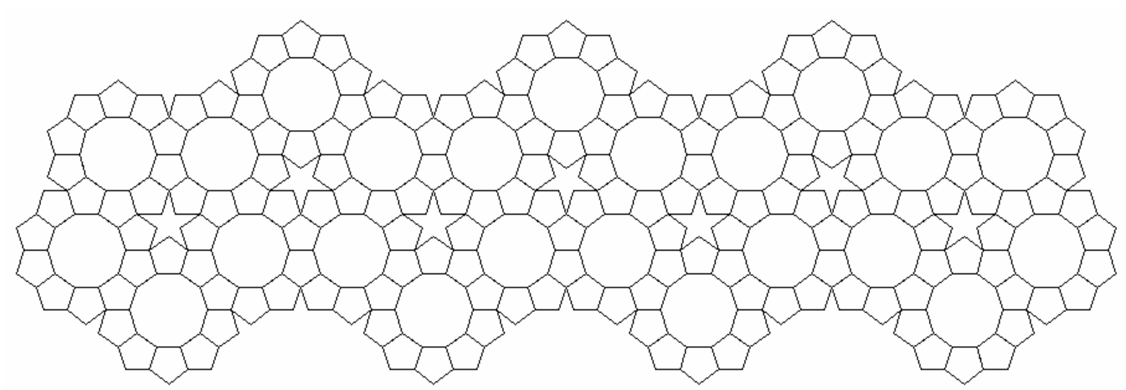


Come nella 4-5-20, si possono mettere insieme 5 celle elementari a forma di pentagono:

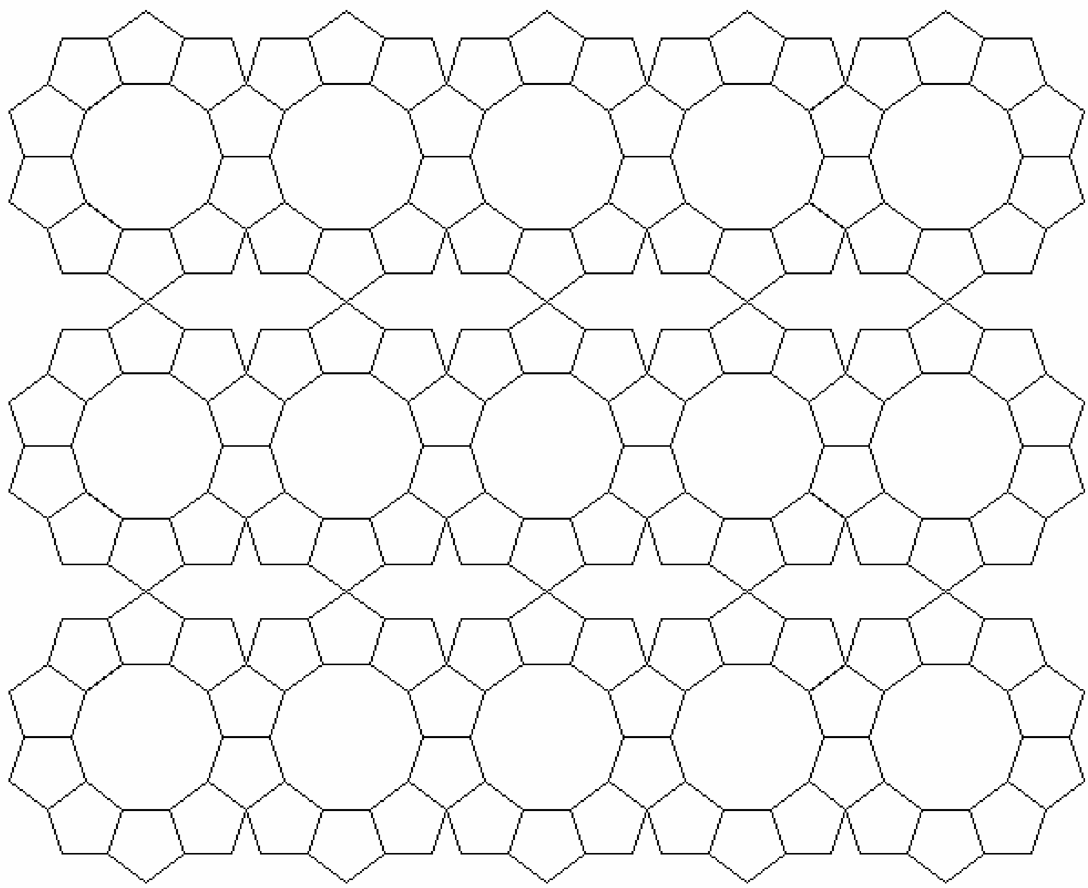


e formare quindi le due configurazioni seguenti:



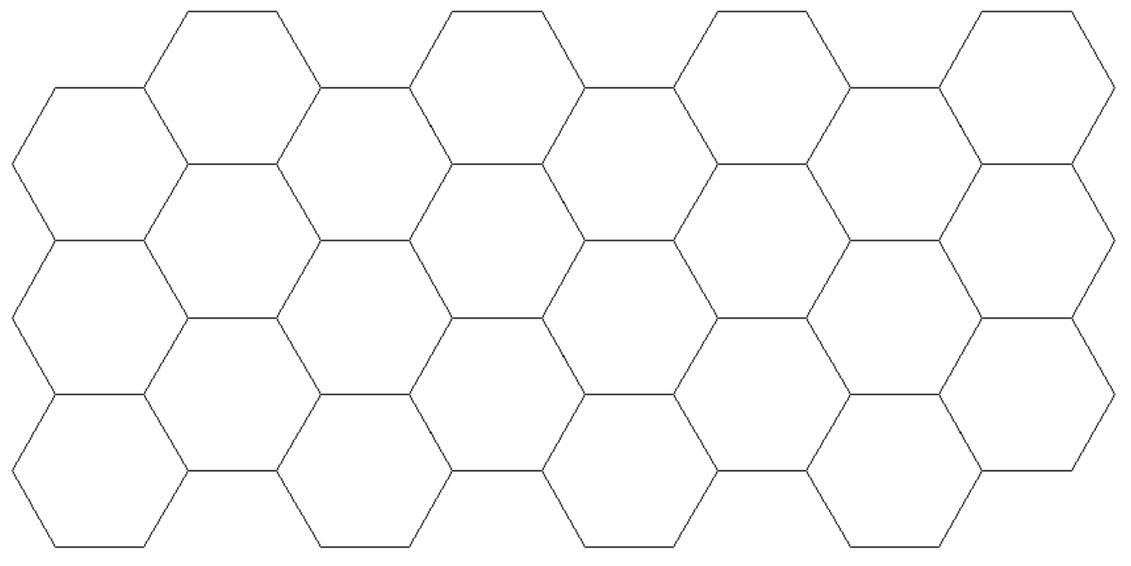


Se vogliamo disporre in modo regolare la cella elementare si ha infine la pavimentazione sottostante:



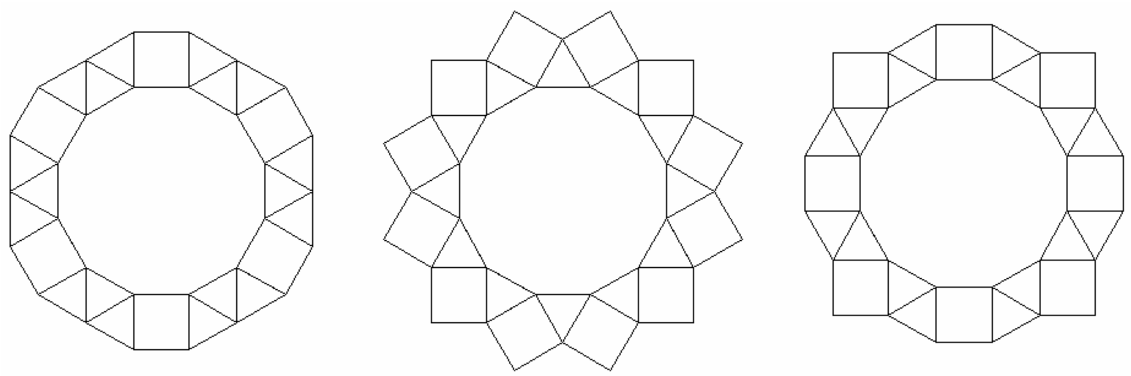
# 6-6-6

Questa configurazione è compatibile e non merita nessun commento. Infatti è frequente trovare in commercio mattoni esagonali per realizzare pavimenti come quello in figura.

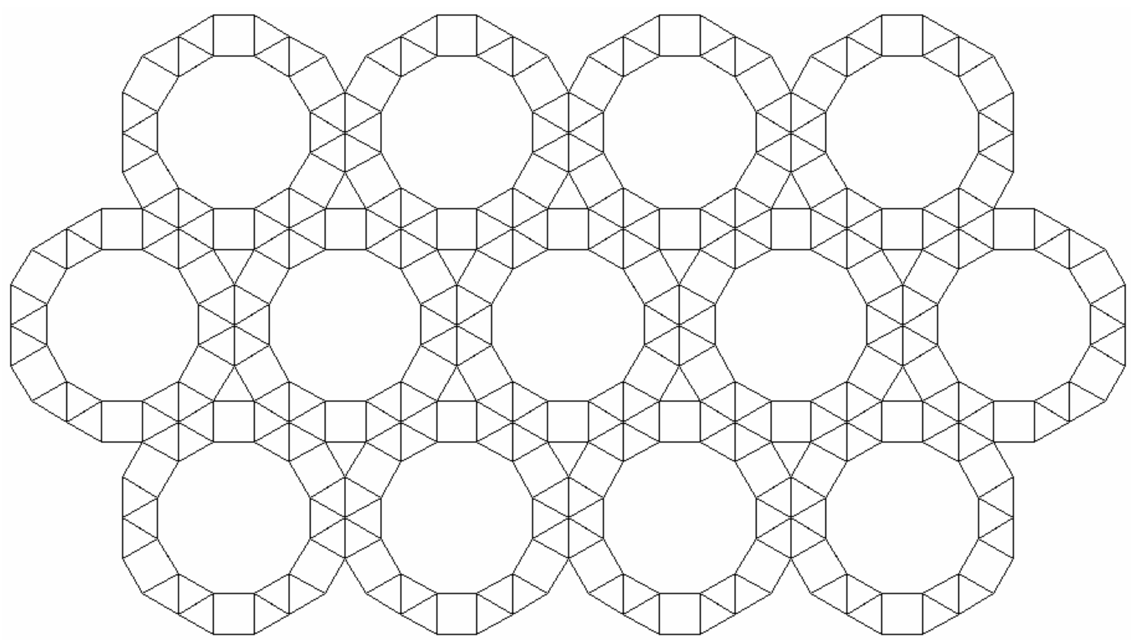


# 3-3-4-12

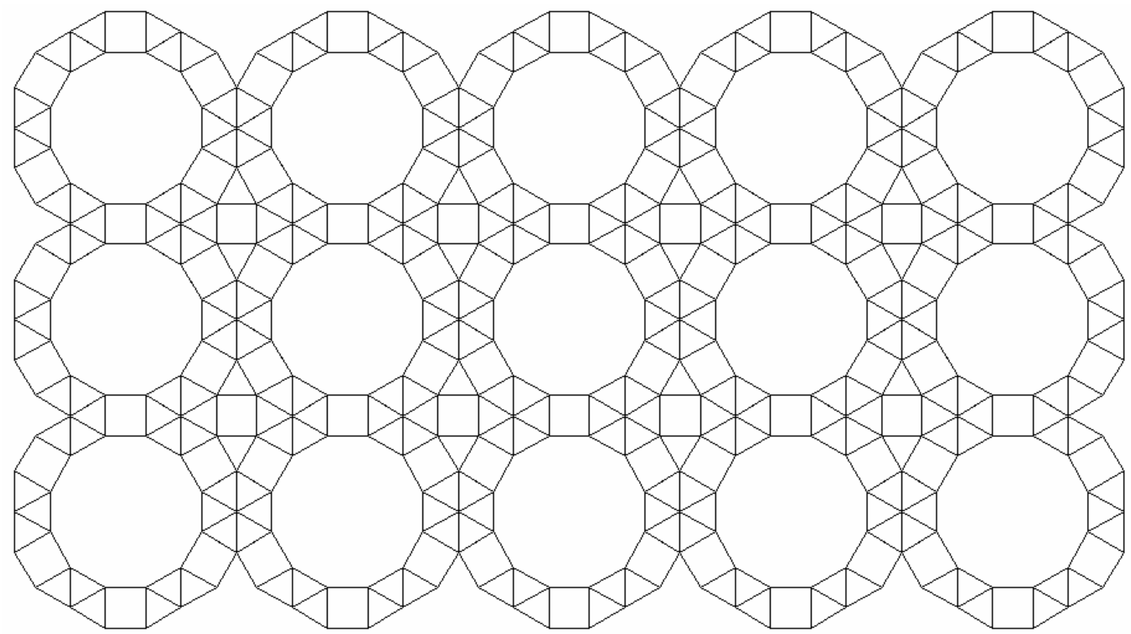
Cominciamo a vedere ora cosa accade quando abbiamo una combinazione con quattro poligoni per spigolo. In questo caso le configurazioni possibili di una cella elementare sono tre: la 3-3-4-12, la 3-4-3-12 e le due precedenti alternate.
Le prime due, pur non essendo compatibili, formano degli spazi vuoti che possono essere riempiti con poligoni regolari; la terza configurazione è invece compatibile.



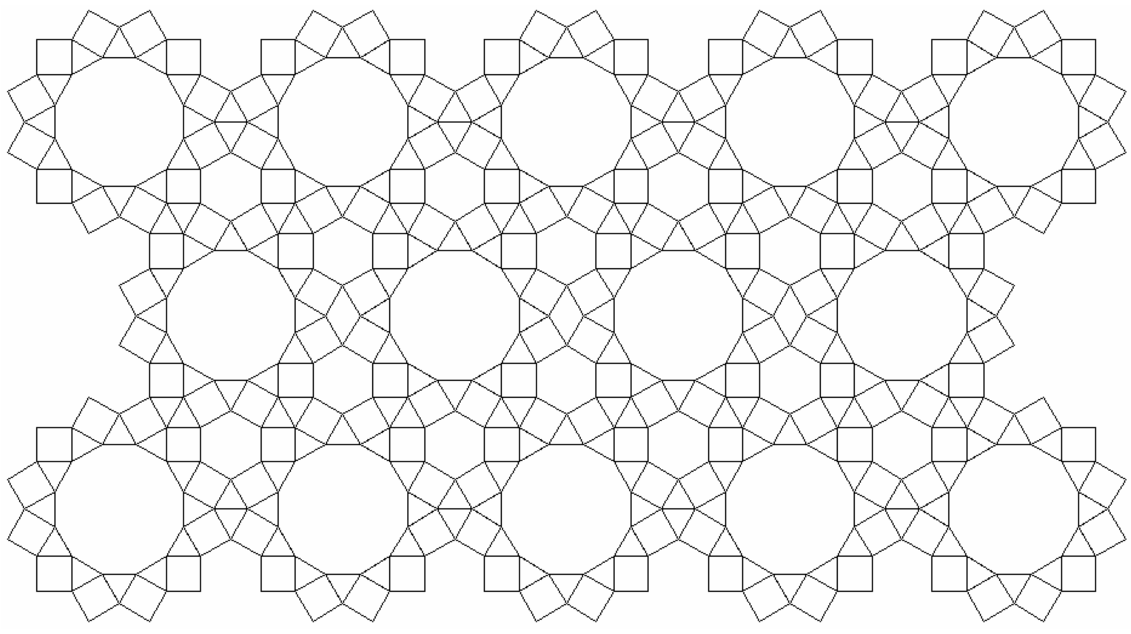
Con la prima configurazione abbiamo due possibilità. La prima si ottiene disponendo la cella elementare a triangolo. Si forma uno spazio vuoto che però è formato da un triangolo equilatero e quindi la lacuna può essere colmata.



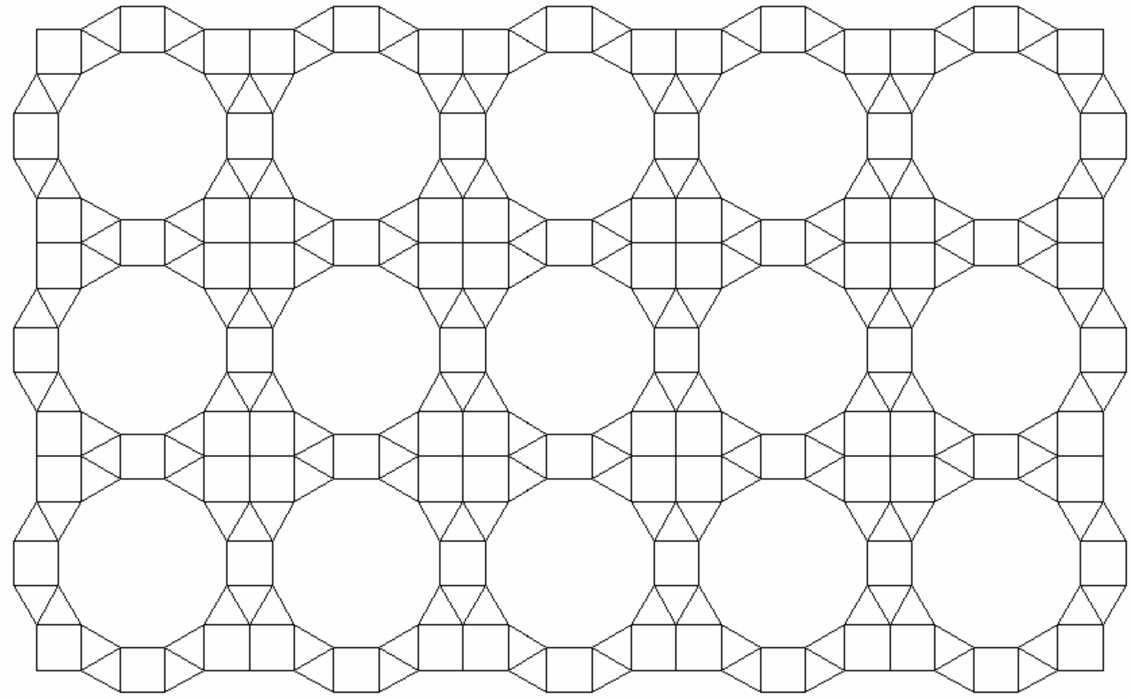
La seconda si ottiene disponendo la cella elementare ai vertici di un quadrato. Anche in questo caso si formano delle zone vuote che possono essere colmati con un quadrato e quattro triangoli.



Con la configurazione 3-4-3-12 si formano due tipi di spazi vuoti, una esagonale colmabile e l'altra a forma di rombo colmabile anch'essa con due triangoli.

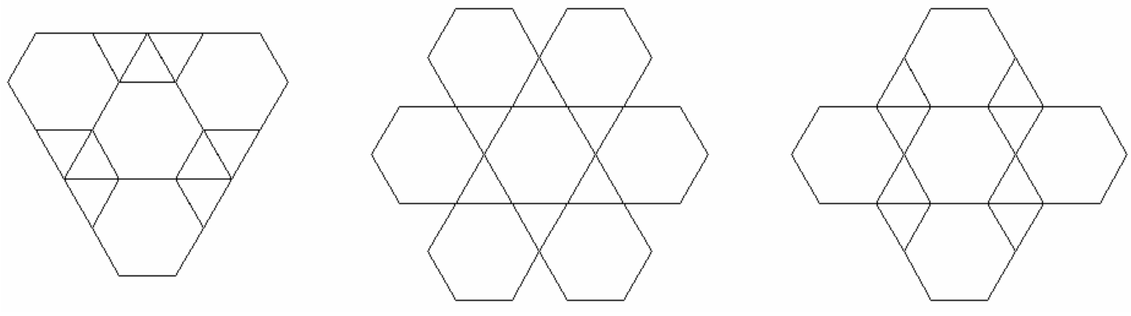


La configurazione alternata è invece compatibile e quindi non ha bisogno di riempimenti.

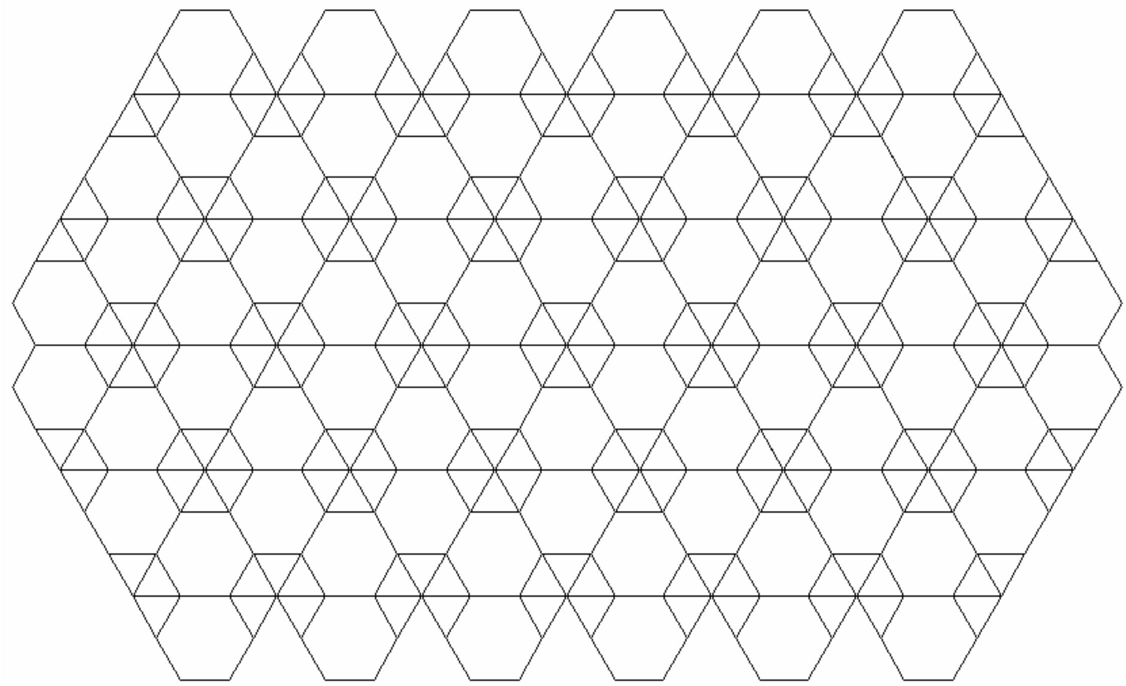


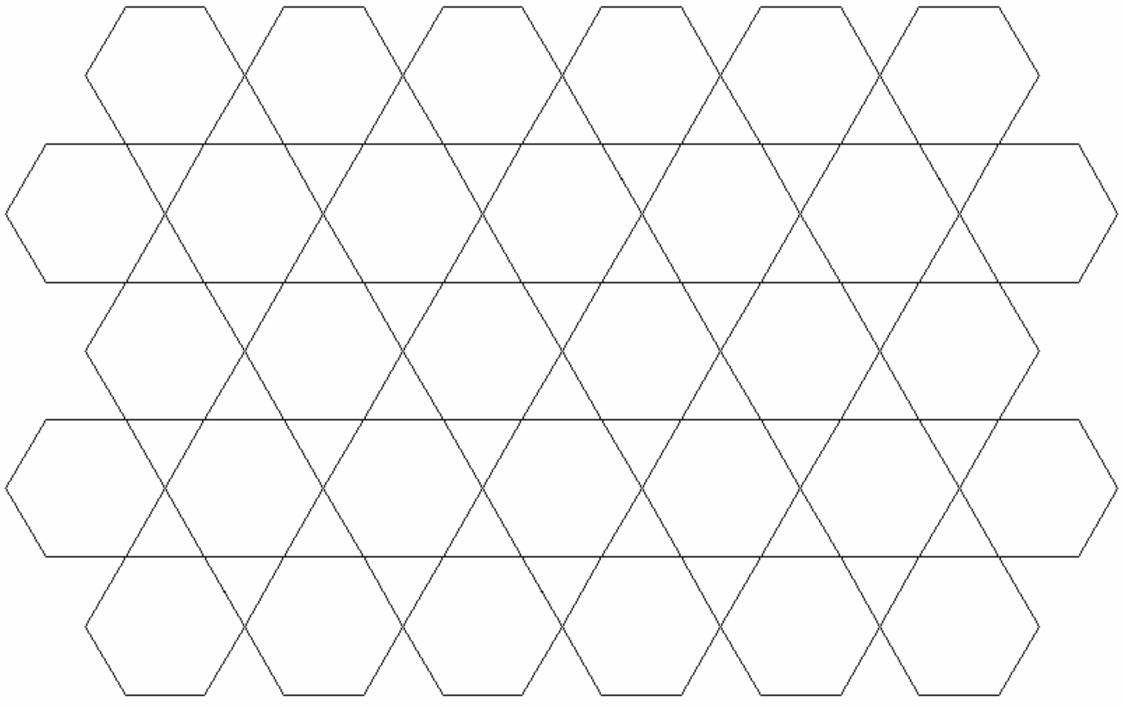
# 3-3-6-6

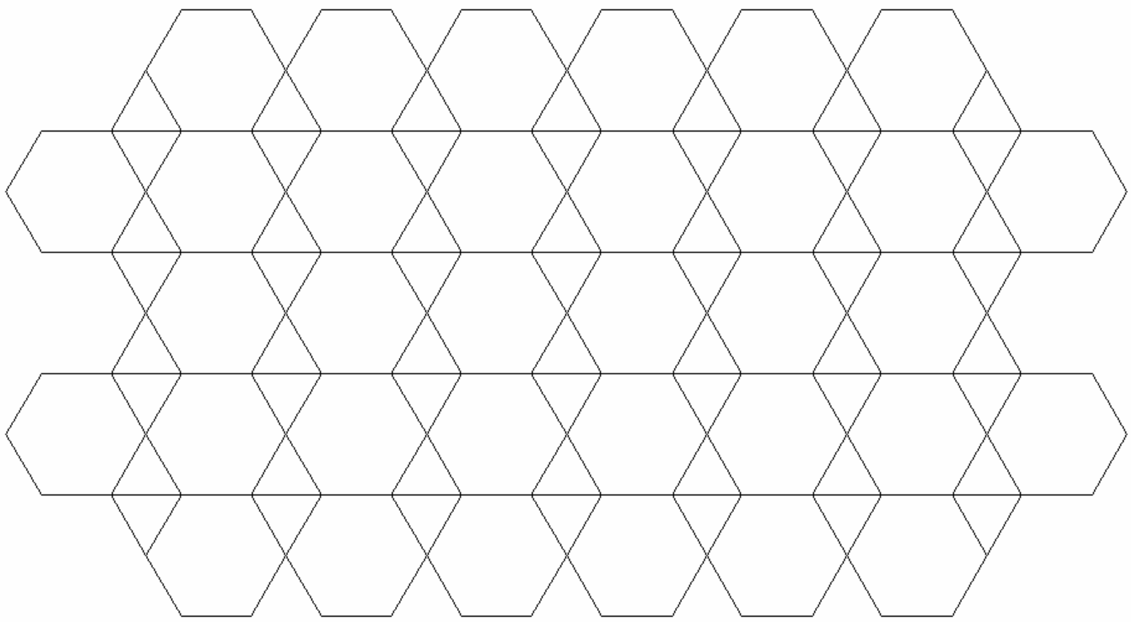
Due triangoli e due esagoni danno luogo a tre celle basi: la 3-3-6-6, la 3-6-3-6 ed una alternata.



Si hanno così le seguenti configurazioni, tutte compatibili.

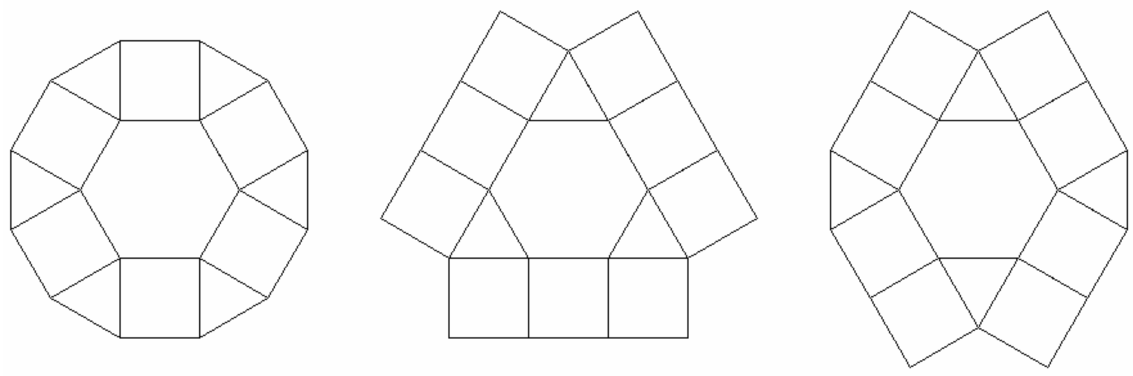




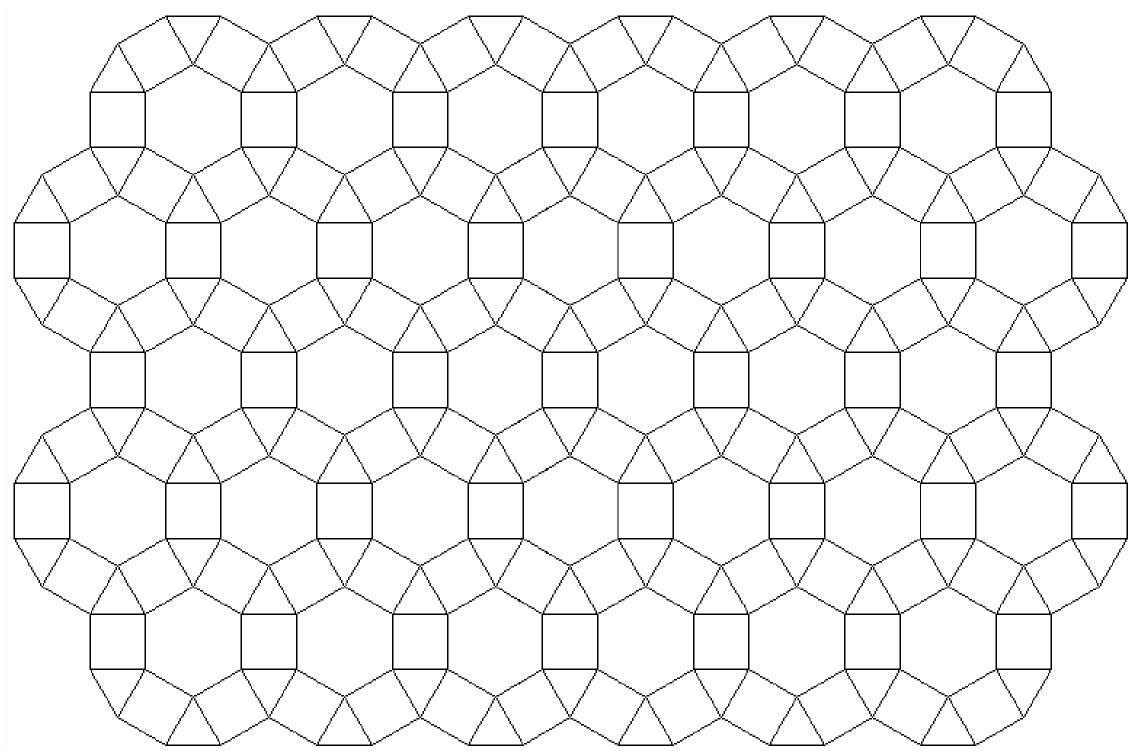


# 3-4-4-6

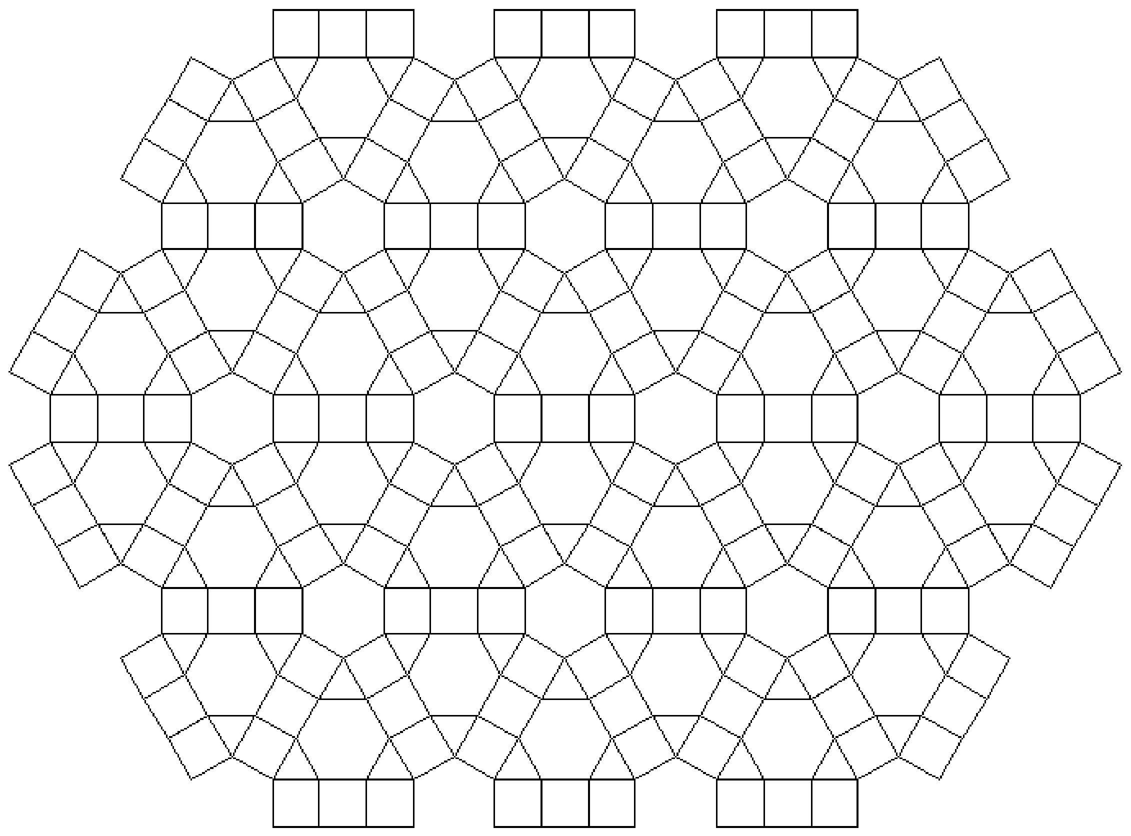
Due quadrati, un triangolo ed un esagono danno luogo a tre celle basi: la 3-4-4-6, la 3-4-6-4 ed una alternata. Questa combinazione da luogo a diverse disposizioni interessanti. La figura seguente mostra le celle basi di partenza.



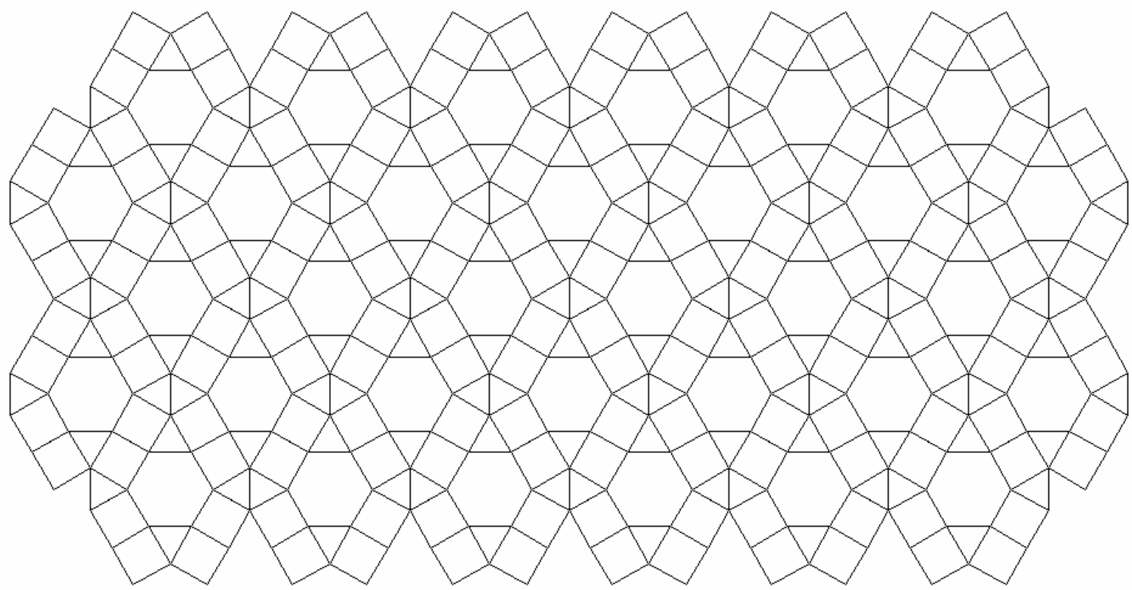
Queste celle sono tutte compatibili. Le figure sotto mostrano le varie disposizioni.
Con la prima si ottiene la pavimentazione seguente:



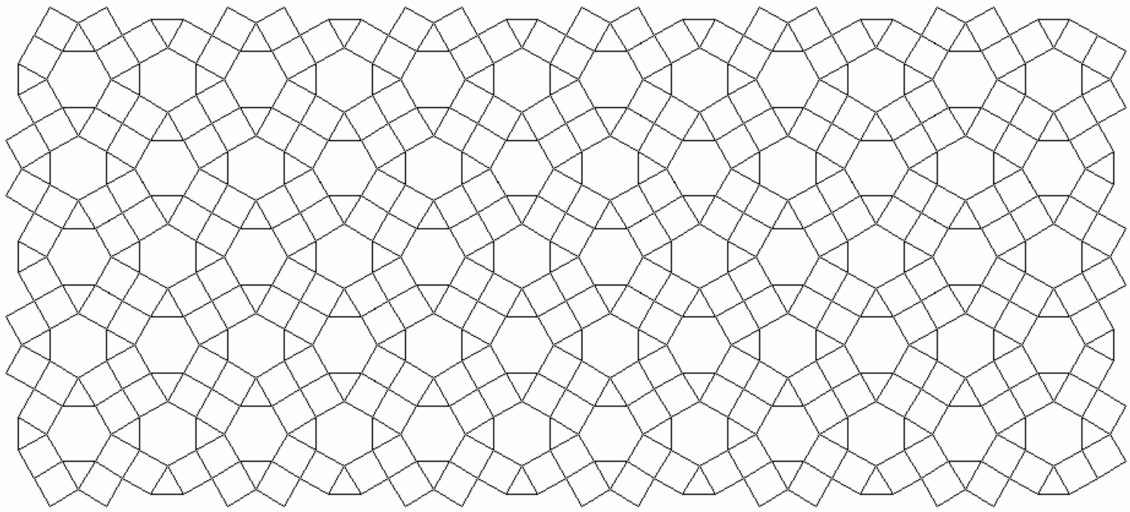
La seconda cella da una configurazione che contiene anche la prima.



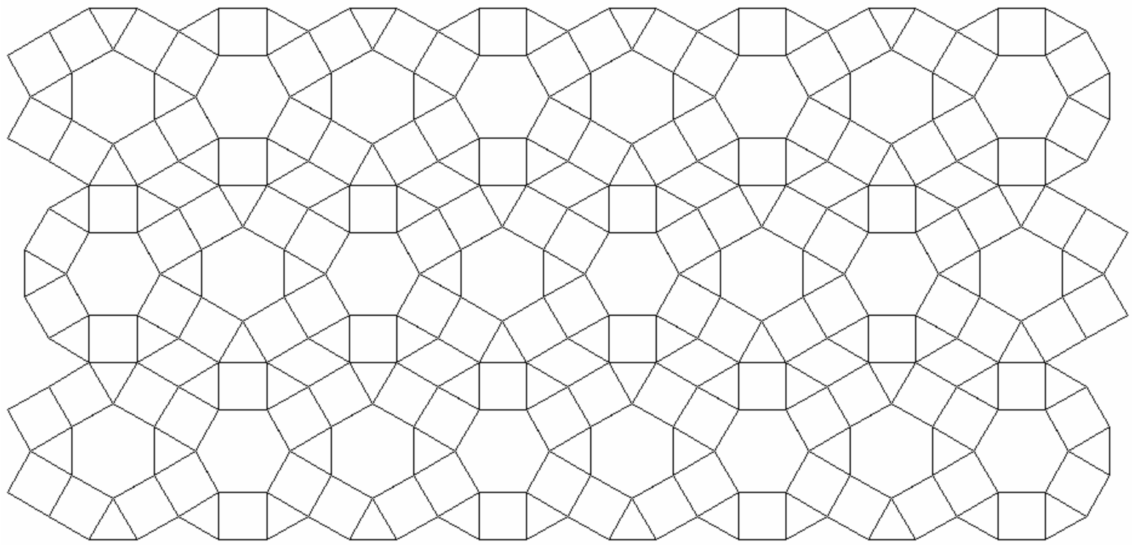
ed infine la terza cella fornisce la disposizione sottostante.



La terza cella potrebbe essere montata nel modo seguente disponendola alternativamente con l'esagono ruotato a 90°.

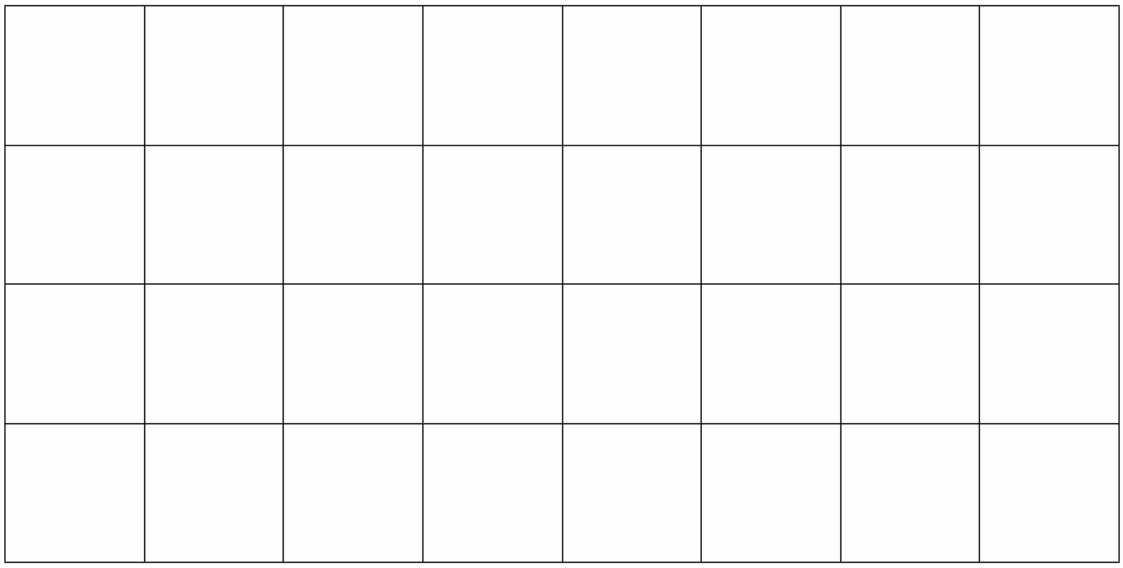


Un'altra disposizione si ottiene combinando la prima e la terza cella, ma in questo caso si formano dei vuoti a forma di rombo che possono essere comunque colmati con due triangoli equilateri:



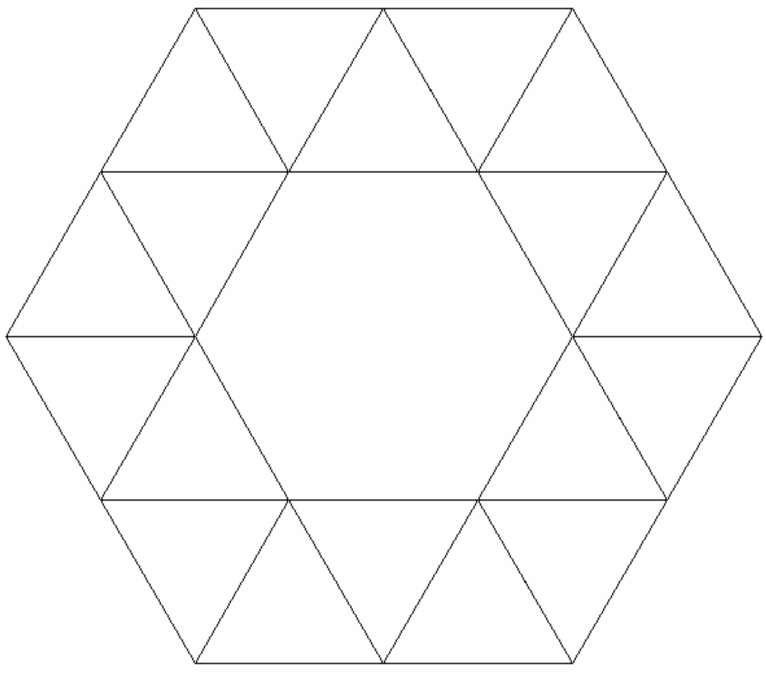
# 4-4-4-4

Questa combinazione è banale e non merita nessun commento.

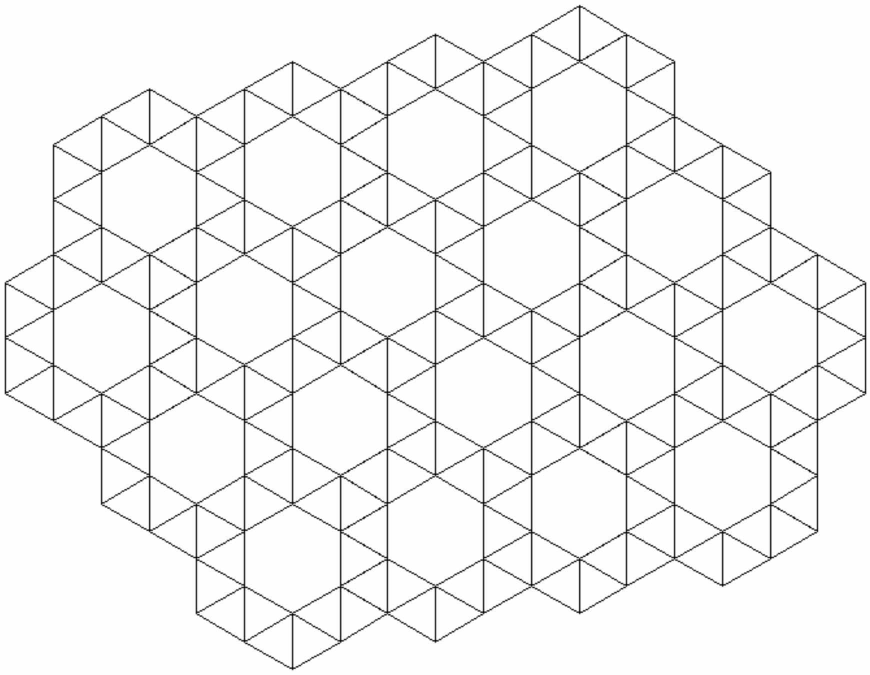


# 3-3-3-3-6

Con cinque piastrelle per spigolo si ottengono delle combinazioni molto semplici a causa della presenza di molti triangoli. La cella base della combinazione 3-3-3-3-6 è la seguente:

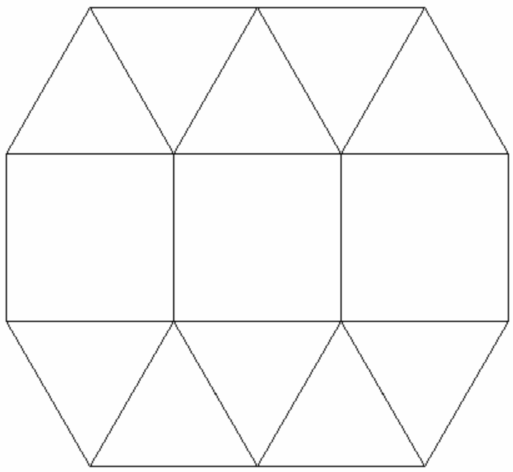


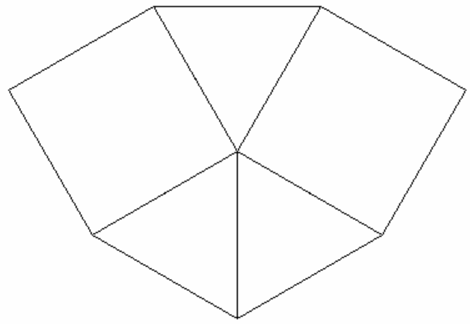
Tale combinazione è compatibile e consente la disposizione sottostante:



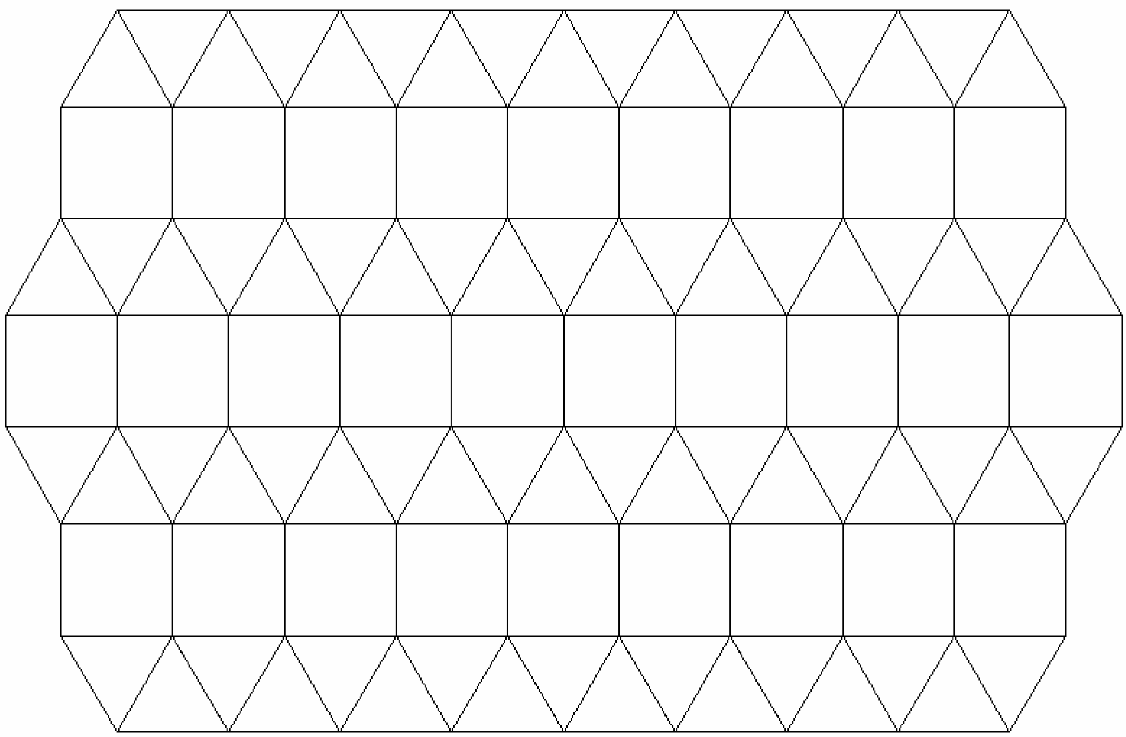
# 3-3-3-4-4

Questa combinazione da luogo a due celle basi. Una con i due quadrati adiacenti e l'altra con i quadrati separati da un triangolo, entrambe compatibili:

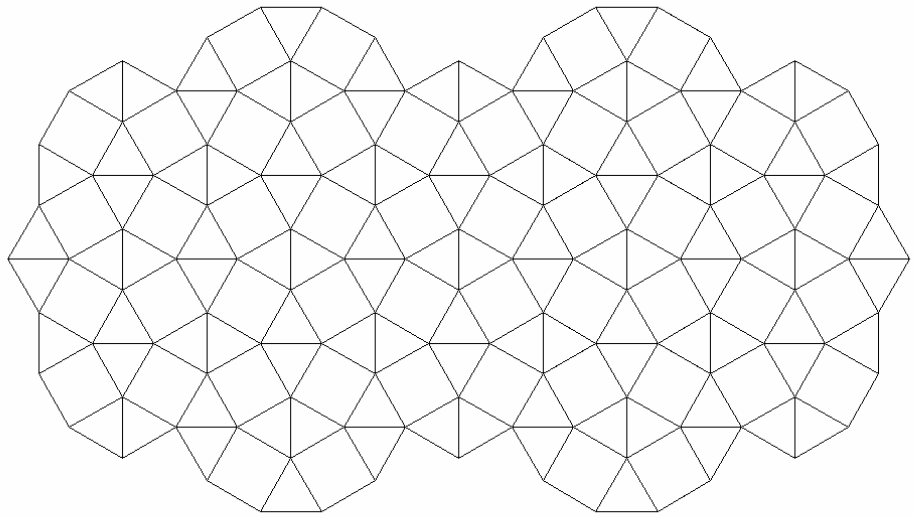




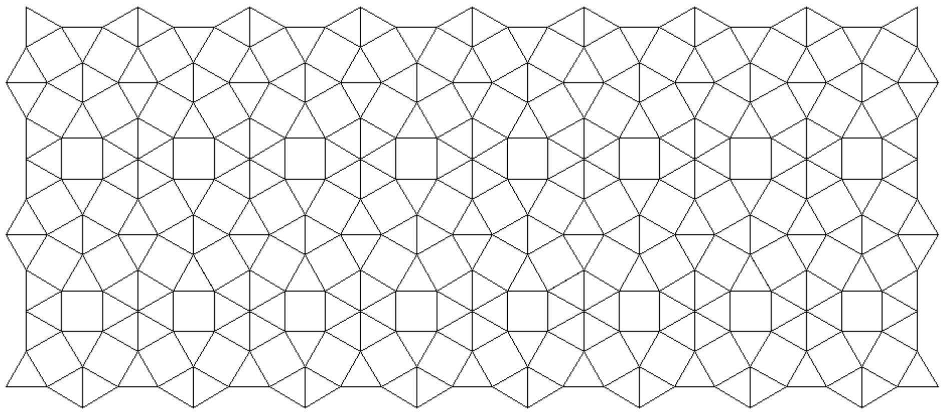
La prima cella fornisce la disposizione seguente:

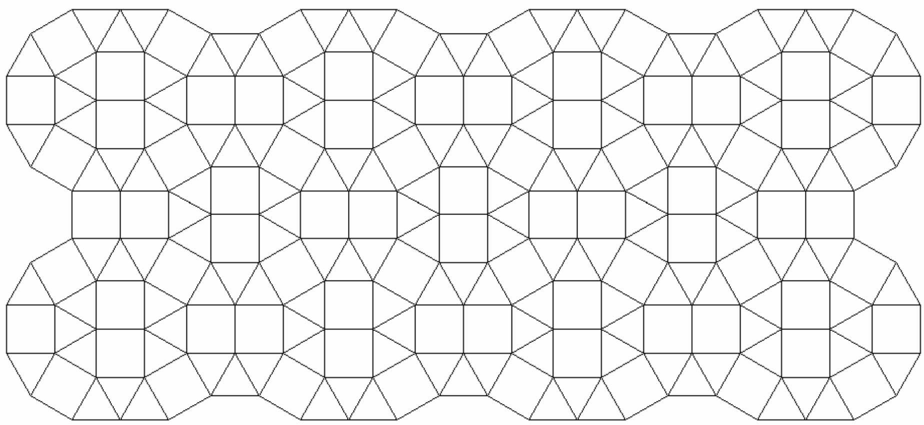


Mentre la seconda da:



è possibile anche combinare le due celle precedenti e ottenere due pavimentazioni come quelle delle figure sottostanti:

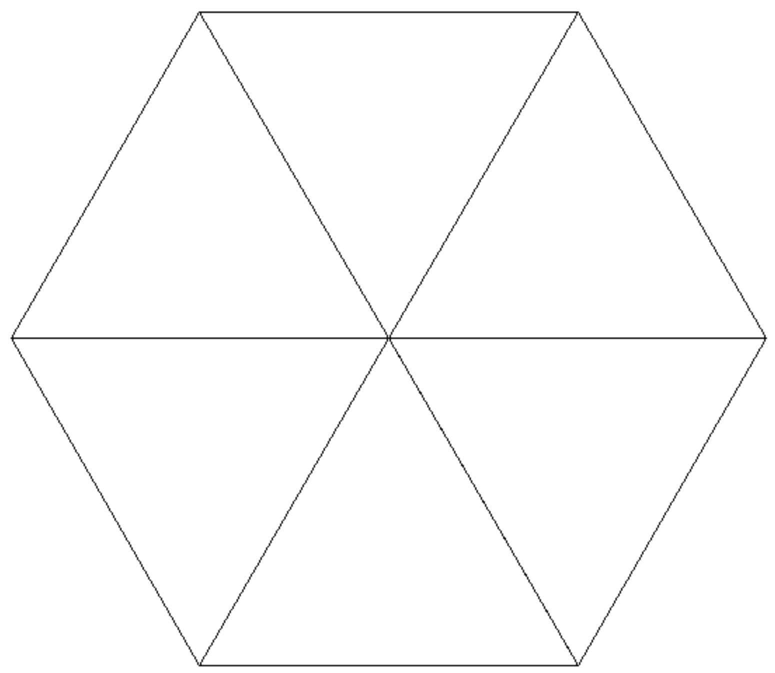




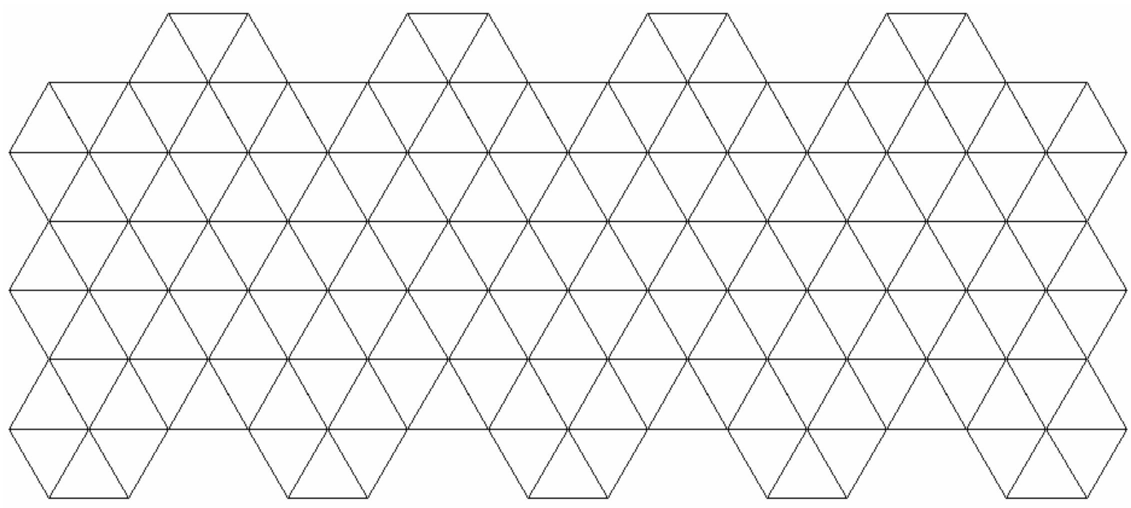
e probabilmente se ne possono creare ancora altre.

# 3-3-3-3-3-3

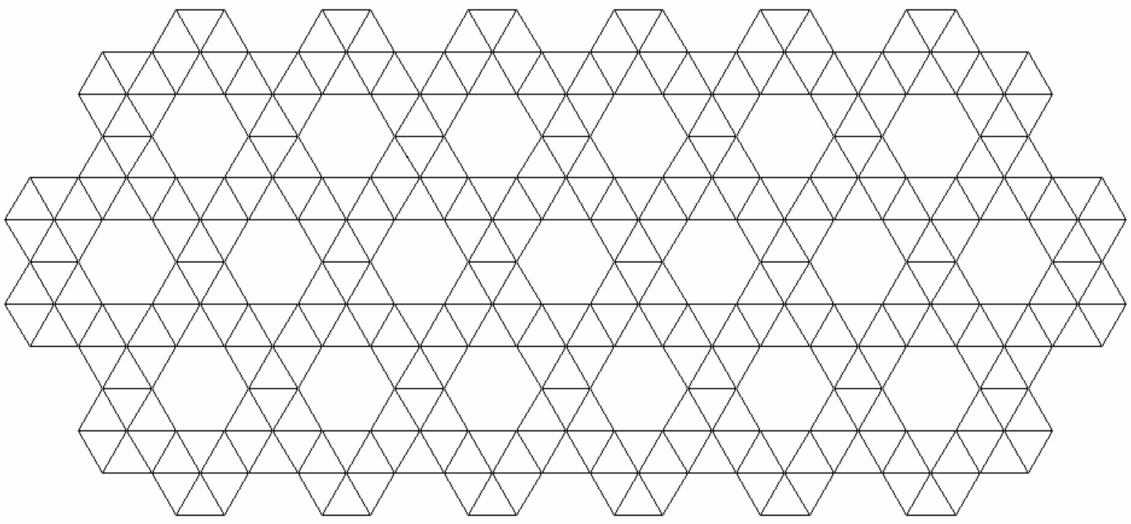
Questa è l'unica combinazione a sei piastrelle tutte triangolari e disposte ad esagono, il quale costituisce la cella base.



Si ottiene così la pavimentazione seguente:



è possibile ottenere una disposizione diversa se si sostituisce alternativamente la cella base con un esagono:



Queste sono tutte le disposizioni che sono riuscito a trovare e come già precisato, non sono convinto che siano tutte quelle possibili da realizzare.

Inoltre tutto quello che è stato fatto riguardava l'uso di poligoni regolari aventi lo stesso lato mentre molte aziende producono piastrelle rettangolari e quadrate con lati diversi.

Provate a liberare la vostra fantasia e cercate altre soluzioni originali.

www.carlocalo.it