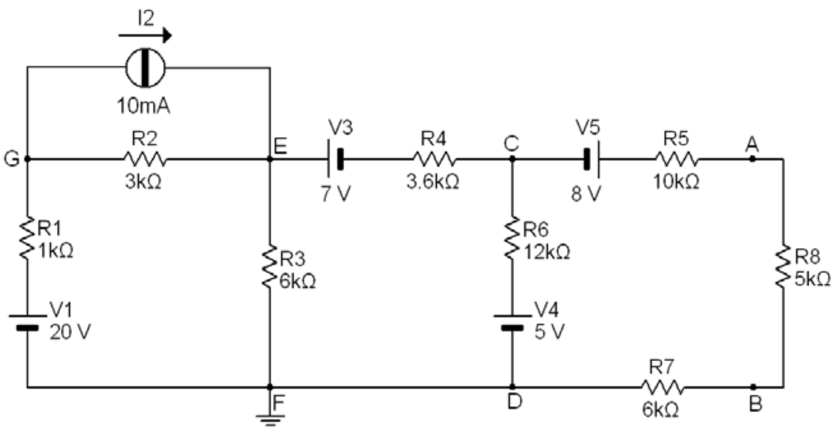
| | |
|---|---|
| *Classe* | *3ª Elettronici* |
| *Materia* | *Elettrotecnica* |
| *Argomento* | *Reti elettriche* |

# Esercizio

Nel circuito di figura, utilizzando il teorema di Thevenin attraverso riduzioni successive, determinare la tensione ai capi della resistenza $R_8$.



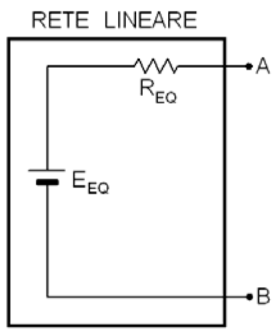

Risolvere poi lo stesso quesito utilizzando la legge di Kirchhoff alle maglie.

❖

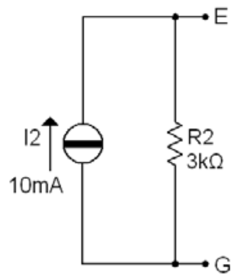
Innanzitutto è bene ricordare l'enunciato del teorema di Thevenin:

*Una rete lineare compresa tra due nodi e composta da un qualsiasi numero di resistenze e generatori, equivale ad un unico generatore di tensione, di valore pari alla tensione a vuoto tra i due nodi, con un unica resistenza in serie, di valore pari alla resistenza presente tra i due nodi considerando nulli i generatori.*

*Considerare nulli i generatori vuol dire "cortocircuitare" quelli di tensione e "aprire" quelli di corrente.*



In altre parole, indipendentemente dalla complessità circuitale, una rete lineare è sempre rappresentabile come un generatore di tensione reale.

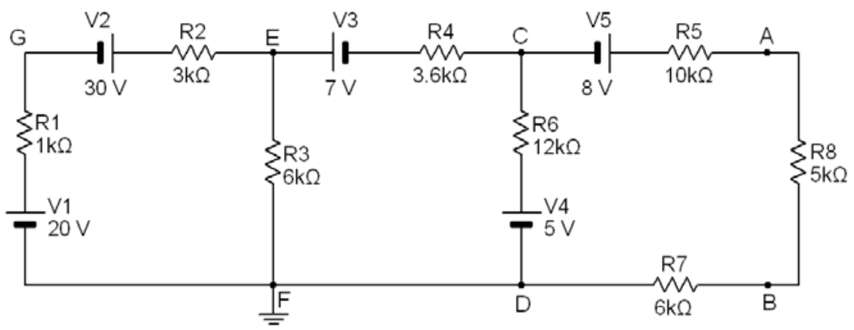



Cominciamo a semplificare il circuito dato a partire dai punti E-G. Applicando il teorema di Thevenin al circuito formato dal generatore di corrente $I_2$ e dalla resistenza in parallelo $R_2$, si ha che il generatore equivalente di tensione vale:

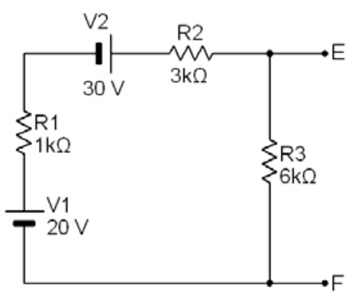
$$E_{EG} = V_2 = R_2 \cdot I_2 = 3 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 30\,\mathrm{V}$$

La resistenza equivalente coincide con $R_2$ in quanto aprendo il generatore di corrente $I_2$ l'unica resistenza presente fra i morsetti considerati è la $R_2$.

Con questa prima semplificazione il circuito diventa:




Consideriamo ora la rete compresa a sinistra dei morsetti E-F, includendo anche il ramo verticale contenente $R_3$.




Utilizzando la legge di Kirchhoff alla maglia considerata, si ha:

$$\left(R_1 + R_2 + R_3\right) \cdot I = V_1 + V_2$$

da cui

$$I = \frac{V_1 + V_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{20+30}{(1+3+6)\cdot 10^3} = 5\,\text{mA}$$

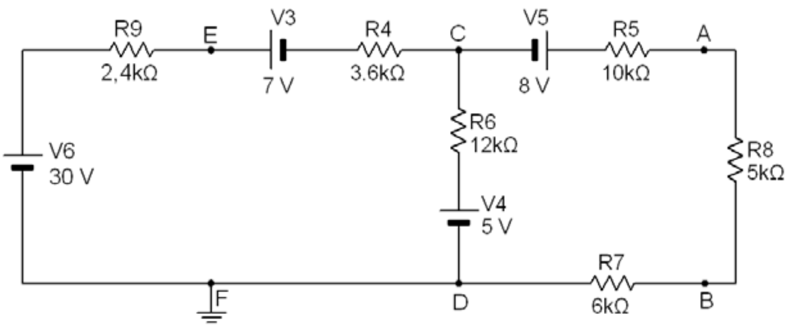
La tensione equivalente risulta pertanto:

$$E_{EF} = V_6 = R_3 \cdot I = 6\cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 30\,\text{V}$$

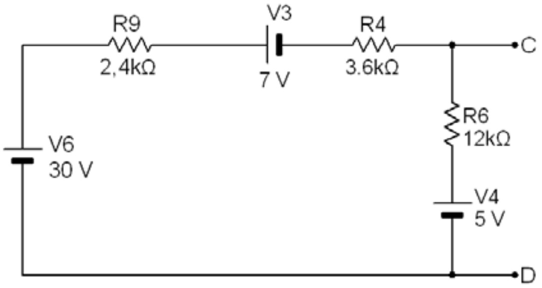
Cortocircuitando i generatori di tensione $V_1$ e $V_2$, possiamo determinare la resistenza equivalente data dalla serie di $R_1$ ed $R_2$ in parallelo alla $R_3$:

$$R_{EF} = R_9 = \frac{(R_1 + R_2)\cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(1+3)\cdot 6 \cdot 10^6}{(1+3+6)\cdot 10^3} = 2,4\,\text{k}\Omega$$

Il circuito assume quindi la forma seguente:




Procediamo in maniera analoga a quanto fatto nel punto precedente e consideriamo ora la rete compresa a sinistra dei morsetti C-D, includendo anche il ramo verticale contenente $R_6$ e $V_4$.




Si ha:

$$(R_9 + R_4 + R_6)\cdot I = V_6 - V_7 - V_5$$

cioè

$$I = \frac{V_6 - V_7 - V_5}{R_9 + R_4 + R_6} = \frac{30 - 7 - 5}{(2,4 + 3,6 + 12) \cdot 10^3} = 1\,\mathrm{mA}$$

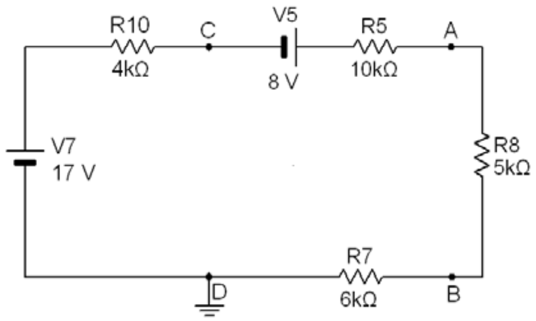
La tensione equivalente risulta pertanto:

$$E_{CD} = V_7 = R_6 \cdot I + V_4 = 12 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 5 = 17\,\mathrm{V}$$

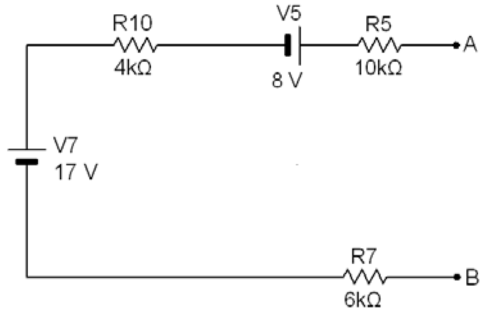
Cortocircuitando i generatori di tensione $V_1$ e $V_2$, possiamo determinare la resistenza equivalente:

$$R_{CD} = R_{10} = \frac{(R_4 + R_9) \cdot R_6}{R_4 + R_9 + R_6} = \frac{(2,4 + 3,6) \cdot 12 \cdot 10^6}{(2,4 + 3,6 + 12) \cdot 10^3} = 4\,\mathrm{k\Omega}$$

Il circuito ulteriormente semplificato diventa.




A questo punto si potrebbe risolvere facilmente con Kirchhoff in quanto trattasi di una sola maglia chiusa, ma procediamo ulteriormente considerando la parte sinistra ai punti A e B.

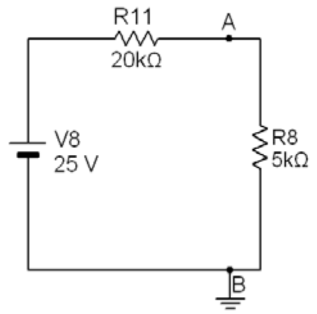



Questa volta il circuito considerato non è chiuso pertanto la tensione a vuoto misurata fra i morsetti A e B è data da:

$$E_{AB} = V_8 = V_7 + V_5 = 17 + 8 = 25\,\mathrm{V}$$

mentre la resistenza equivalente vale:

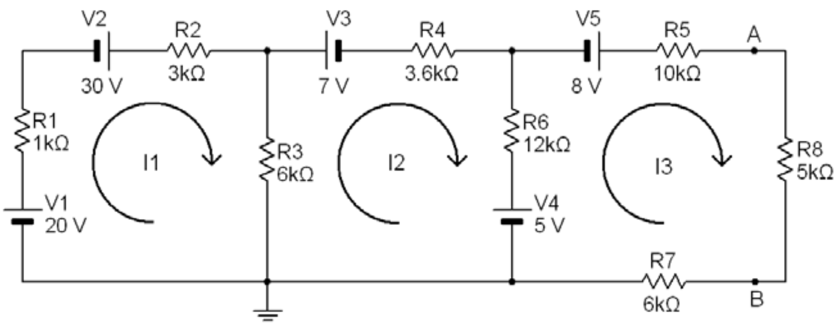
$$R_{AB} = R_{11} = R_7 + R_{10} + R_5 = (4+6+10)\cdot 10^3 = 20\,\mathrm{k\Omega}$$




A questo punto il circuito assume la classica forma del partitore di tensione, quindi:

$$V_{AB} = V_{R_8} = \frac{V_8}{R_{11}+R_8}\cdot R_8 = \frac{25}{(20+5)\cdot 10^3}\cdot 5\cdot 10^3 = 5\,\mathrm{V}$$

Per risolvere il circuito con la legge di Kirchhoff alle maglie consideriamo lo schema ricavato dopo la prima semplificazione e scegliamo i versi di percorrenza come indicato in figura.




Ricordiamo che la legge o il principio di Kirchhoff alle maglie, afferma che:

*In un circuito a parametri concentrati, la somma algebrica delle tensioni lungo una linea chiusa è nulla.*

$$\sum V - \sum R\cdot I = 0$$

Questa relazione può essere scritta anche così:

$$\sum V = \sum R\cdot I$$

In un circuito quindi, fissato un percorso chiuso, la somma algebrica di tutti i generatori di tensione presi con il loro segno (positivo se concorde al verso di percorrenza e negativo nel caso opposto), è pari alla somma delle cadute di tensione sulle resistenze all'interno del percorso.

Nel nostro caso abbiamo indicato le correnti di maglia $I_1$, $I_2$ e $I_3$; che solo in alcuni casi coincidono con le correnti effettive nelle resistenze; nei rami comuni ai vari percorsi invece va considerata la somma o la differenza a seconda che i versi di percorrenza siano concordi o discordi rispettivamente nel ramo considerato.

Per risolvere il nostro esercizio è sufficiente determinare la $I_3$, ma noi calcoleremo ugualmente tutte le correnti nei vari rami.

Scriviamo dunque le relazioni per le tre maglie considerate, mettendole a sistema:

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2 I_1 + R_3 \left(I_1 - I_2\right) = V_1 + V_2 \\ R_3 \left(I_2 - I_1\right) + R_4 I_2 + R_6 \left(I_2 - I_3\right) = -V_3 - V_4 \\ R_6 \left(I_3 - I_2\right) + R_5 I_3 + R_8 I_3 + R_7 I_3 = V_4 + V_5 \end{cases}$$

Ordiniamo il sistema raggruppando le correnti incognite:

$$\begin{cases} \left(R_1 + R_2 + R_3\right) I_1 - R_3 I_2 = V_1 + V_2 \\ -R_3 I_1 + \left(R_3 + R_4 + R_6\right) I_2 - R_6 I_3 = -V_3 - V_4 \\ -R_6 I_2 + \left(R_6 + R_5 + R_7 + R_8\right) I_3 = V_4 + V_5 \end{cases}$$

Sostituiamo i valori assegnati

$$\begin{cases} 10 \cdot 10^3 I_1 - 6 \cdot 10^3 I_2 = 50 \\ -6 \cdot 10^3 I_1 + 21{,}6 \cdot 10^3 I_2 - 12 \cdot 10^3 I_3 = -12 \\ -12 \cdot 10^3 I_2 + 33 \cdot 10^3 I_3 = 13 \end{cases}$$

Scriviamo il sistema in forma matriciale, considerando le correnti in mA, in modo da omettere il fattore moltiplicativo $10^3$ delle resistenze e utilizziamo il metodo di minimizzazione di Gauss-Jordan

$$\begin{vmatrix} 10 & -6 & 0 & 50 \\ -6 & 21{,}6 & -12 & -12 \\ 0 & -12 & 33 & 13 \end{vmatrix}$$

Moltiplichiamo la prima riga per 3 e la seconda per 5:

$$\begin{vmatrix} 10 & -6 & 0 & 50 \\ -6 & 21{,}6 & -12 & -12 \\ 0 & -12 & 33 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 5 \\ \phantom{0} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 30 & -18 & 0 & 150 \\ -30 & 108 & -60 & -60 \\ 0 & -12 & 33 & 13 \end{vmatrix}$$

Sostituiamo la seconda con la somma della prima con la seconda:

$$\begin{vmatrix} 30 & -18 & 0 & 150 \\ -30 & 108 & -60 & -60 \\ 0 & -12 & 33 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & -18 & 0 & 150 \\ 0 & 90 & -60 & 90 \\ 0 & -12 & 33 & 13 \end{vmatrix}$$

Semplifichiamo la prima e la seconda dividendo per 6 e 30 rispettivamente:

$$\begin{vmatrix} 30 & -18 & 0 & 150 \\ 0 & 90 & -60 & 90 \\ 0 & -12 & 33 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} :6 \\ :30 \\ \phantom{0} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 25 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & 33 & 13 \end{vmatrix}$$

Moltiplichiamo la seconda per 4:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 25 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & 33 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ \cdot 4 \\ \phantom{0} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 25 \\ 0 & 12 & -8 & 12 \\ 0 & -12 & 33 & 13 \end{vmatrix}$$

Sostituiamo la terza con la somma della seconda con la terza:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 25 \\ 0 & 12 & -8 & 12 \\ 0 & -12 & 33 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 25 \\ 0 & 12 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 25 & 25 \end{vmatrix}$$

Semplifichiamo la seconda e la terza dividendo per 4 e 25 rispettivamente:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 25 \\ 0 & 12 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 25 & 25 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ :4 \\ :25 \end{array} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 25 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Il sistema di partenza si è ridotto in forma triangolare superiore ed è risolvibile a partire dalla terza equazione:

$$\begin{cases} 5I_1 - 3I_2 = 25 \\ 3I_2 - 2I_3 = 3 \\ I_3 = 1 \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\begin{cases} I_3 = 1 \\ I_2 = \dfrac{3 + 2I_3}{3} = \dfrac{5}{3} \\ I_1 = \dfrac{25 + 3I_2}{5} = \dfrac{30}{5} = 6 \end{cases}$$

Le tre correnti di maglia valgono quindi

$$I_1 = 6\text{mA} \quad - \quad I_2 \cong 1{,}67\text{mA} \quad - \quad I_3 = 1\text{mA}$$

Pertanto la tensione ai capi della resistenza $R_8$ vale:

$$V_{AB} = R_8 \cdot I_3 = 5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 5\text{V}$$

La soluzione con le correnti di maglia può sembrare più complessa, ma fornisce alla fine tutte le correnti nel circuito, quindi il secondo metodo è preferibile quando è richiesta un’analisi completa del circuito e non la tensione ai capi di una sola resistenza, nel qual caso è preferibile il teorema di Thevenin.