Classe	*5ª Elettronici*
Materia	*Sistemi*
Argomento	*Funzioni di trasferimento*

Esercizio

Il circuito di figura rappresenta un filtro passa-banda. Dopo aver ricavato la funzione di trasferimento, sapendo che

$$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega};\quad R_2 = 40\,\mathrm{k\Omega};\quad R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega};$$
$$R_4 = 49\,\mathrm{k\Omega};\quad C_2 = 25\,\mathrm{nF};\quad C_3 = 32\,\mathrm{nF};$$

determinare:

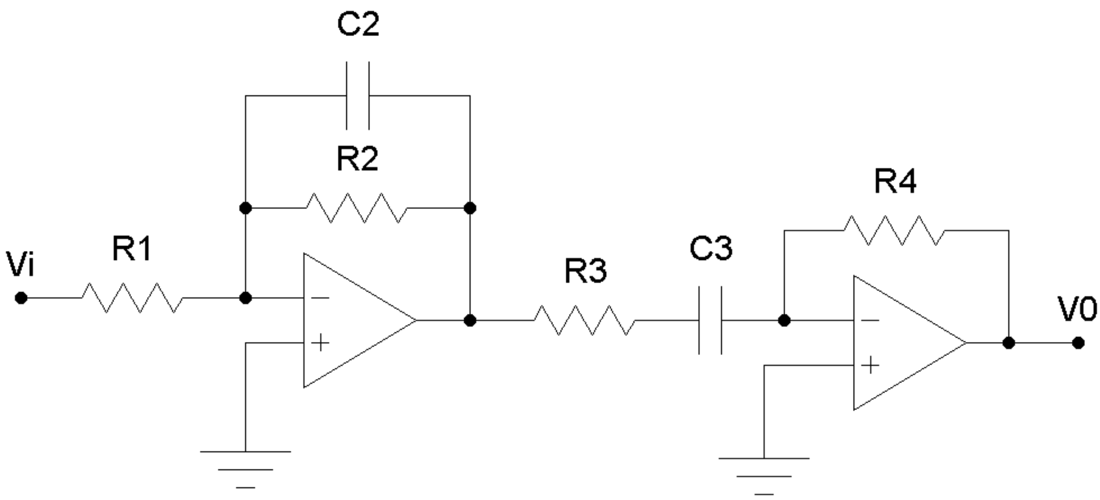
Le pulsazioni di taglio ω_i e ω_s.

Il diagramma di Bode del modulo e della fase.

Il valore del modulo a centro banda.

I valori della pulsazione per i quali si ha

$$V_o = V_i$$



❖

Cominciamo a ricavare la f.d.t.

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = F(s) = \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right)\left(-\frac{Z_4}{Z_3}\right) = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} \tag{1.1}$$

essendo

$$Z_1 = R_1;\quad Z_2 = \frac{R_2}{1+sR_2C_2};\quad Z_3 = \frac{1+sR_3C_3}{sC_3};\quad Z_4 = R_4;$$

La (1.1) diventa

$$F(s)=\frac{R_2R_4C_3}{R_1}\cdot\frac{s}{\left(1+sR_2C_2\right)\left(1+sR_3C_3\right)} \tag{1.2}$$

La f.d.t. presenta uno "zero" nell'origine e due "poli" nei punti di ascissa

$$\omega_i=\frac{1}{R_2C_2};\quad \omega_s=\frac{1}{R_3C_3};$$

che rappresentano le pulsazioni di taglio del filtro.

Sostituendo i valori dati, la (1.2) diventa:

$$F(s)=\frac{98}{3125}\cdot\frac{s}{\left(1+\frac{s}{1000}\right)\left(1+\frac{s}{31250}\right)}=K_B\cdot\frac{s}{\left(1+\frac{s}{p_1}\right)\left(1+\frac{s}{p_2}\right)} \tag{1.3}$$

Individuiamo adesso i punti caratteristici necessari al tracciamento dei diagrammi di Bode del modulo e della fase.

La f.d.t., presenta un primo tratto con una pendenza di +20 db/decade a causa della presenza di uno zero nell'origine. Nel punto di ascissa 1000, un polo semplice annulla lo zero e il diagramma diventa piatto fino al secondo polo semplice a 31250; a questo punto il diagramma scende definitivamente con pendenza -20 db/decade.

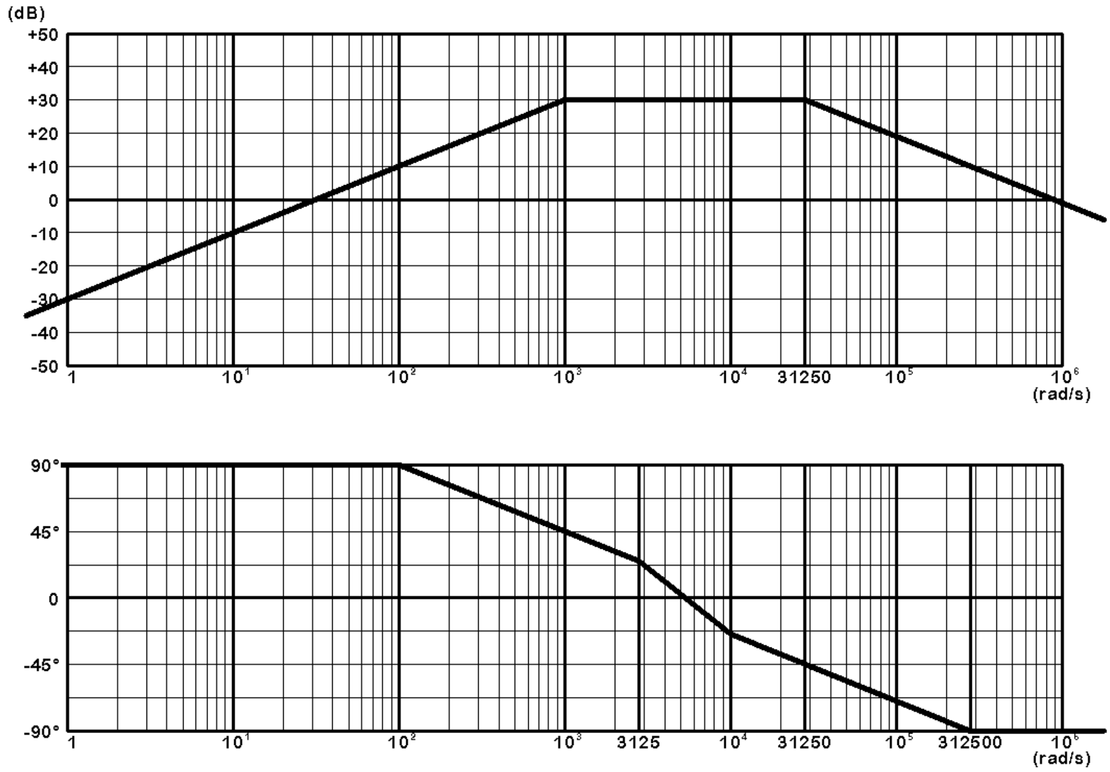
Il punto in cui il diagramma taglia l'asse delle ordinate nel punto di ascissa unitaria vale:

$$20\log K_B=20\log\frac{98}{3125}\simeq-30\,\mathrm{dB}$$

mentre le coordinate dei poli sono:

$$\log 1000=3;\quad \log 31250\simeq 4.5;$$

La figura sottostante mostra i diagrammi di Bode del modulo e della fase della f.d.t. Come possiamo osservare la curva in banda passante presenta un guadagno di +30 dB mentre la fase resta costante e pari a 90° fino a 100 rad/s (una decade prima del polo a 1000 rad/s) poi comincia a diminuire con una pendenza di -45 gradi/decade.
Intorno a 3125 rad/s comincia l'influenza del secondo polo e la pendenza si porta fino a -90 gradi/decade fino a 10000 rad/s quando il primo polo esaurisce la sua influenza.
La pendenza quindi torna ad essere di -45 gradi/decade fino a 312500 rad/s (una decade dopo il secondo polo) dove la fase assume il valore definitivo di -90°.



Determiniamo ora il valore a centro banda del filtro.
Per rendere più semplice la (1.3), mettiamo in evidenza i poli al denominatore; si ha:

$$F(s) = \frac{98 \cdot 10^4 s}{(1000+s)(31250+s)} \tag{1.4}$$

passando al modulo si ottiene:

$$\left|F(j\omega)\right| = \frac{98 \cdot 10^4 \omega}{\sqrt{\left(1000^2 + \omega^2\right)\left(31250^2 + \omega^2\right)}} \tag{1.5}$$

Il valore di centro banda si ottiene con l'espressione

$$\omega_c = 10^{\frac{(\log 1000 + \log 31250)}{2}} = 10^{3.747...} \simeq 5590 \,\text{rad/s} \tag{1.6}$$

che sostituito nella (1.5) da:

$$\left|F(j\omega_c)\right| = 30,39 = 29,65 \,\text{dB} \tag{1.7}$$

Tale risultato è compatibile con il diagramma asintotico di figura (+30 dB).
Osservando il diagramma dei moduli si nota che il filtro in due circostanze taglia l'asse a 0 dB (*pulsazione di cross-over*), rispettivamente prima della pulsazione di taglio inferiore e dopo quella superiore. In tale circostanza l'uscita assume la stessa ampiezza dell'ingresso, cioè deve essere:

$$\left|F(j\omega)\right| = \frac{98 \cdot 10^4 \omega}{\sqrt{\left(1000^2 + \omega^2\right)\left(31250^2 + \omega^2\right)}} = 1 \tag{1.8}$$

Risolviamo la (1.8) portando il denominatore a secondo membro ed elevando al quadrato:

$$\left(98 \cdot 10^4\right)^2 \omega^2 = \left(1000^2 + \omega^2\right)\left(31250^2 + \omega^2\right) \tag{1.9}$$

Ovvero

$$\omega^4 + (1000^2 + 31250^2 - 98^2 \cdot 10^8)\omega^2 + 31250^2 \cdot 1000^2 = 0 \tag{1.10}$$

cioè

$$\omega^4 - 9,594224 \cdot 10^{11} \omega^2 + 9,765625 \cdot 10^{14} = 0 \tag{1.11}$$

La (1.11) è una equazione di secondo grado biquadratica, che ammette quattro soluzioni delle quali due negative e che vanno scartate.

Risolvendo si ha:

$$\omega_{1/2} = \sqrt{\frac{9,594224 \cdot 10^{11} \pm \sqrt{9,594224^2 \cdot 10^{22} - 4 \cdot 9,765625 \cdot 10^{14}}}{2}} \tag{1.12}$$

Le pulsazioni di cross-over risultano essere:

$$\omega_1 = 31,9 \,\text{rad/s}; \quad \omega_2 = 979501,1 \,\text{rad/s};$$

Tale risultato si poteva anche ottenere dal diagramma asintotico, infatti la prima pulsazione di cross-over si trova a metà tra 10^0 e 10^3 sul diagramma, cioè:

$$\omega_1 = 10^{1,5} = 31,6 \,\text{rad/s}$$

Mentre la seconda si trova 1,5 decadi dopo 31250 rad/s, cioè:

$$\omega_2 = 10^{(\log 31250 + 1,5)} = 10^{5,995} = 988211,8 \,\text{rad/s}$$

valori prossimi a quelli determinati analiticamente.

I grafici seguenti mettono a confronto l'andamento reale con quello asintotico del modulo e della fase della funzione di trasferimento.

Come si può osservare, l'andamento asintotico approssima molto bene quello reale in entrambe le situazioni.

Gli scostamenti maggiori come è noto, si hanno in prossimità dei cambiamenti di direzione, e nel nostro caso in prossimità dei poli della funzione di trasferimento.

Diagramma dei Moduli

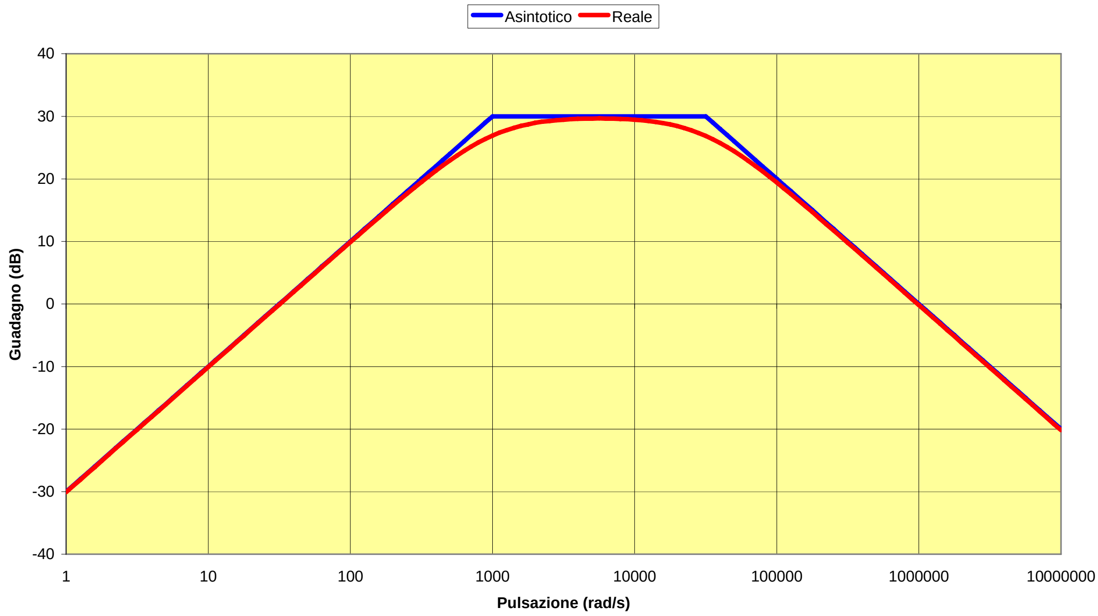


Diagramma delle Fasi