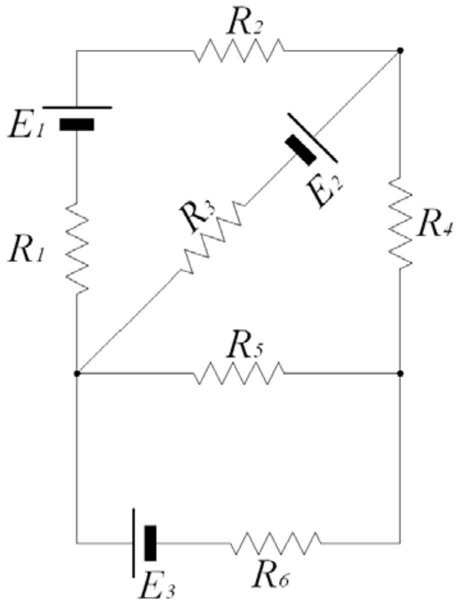
Classe	*4ª Elettronici*
Materia	*Elettronica*
Argomento	*Reti Elettriche*

Esercizio

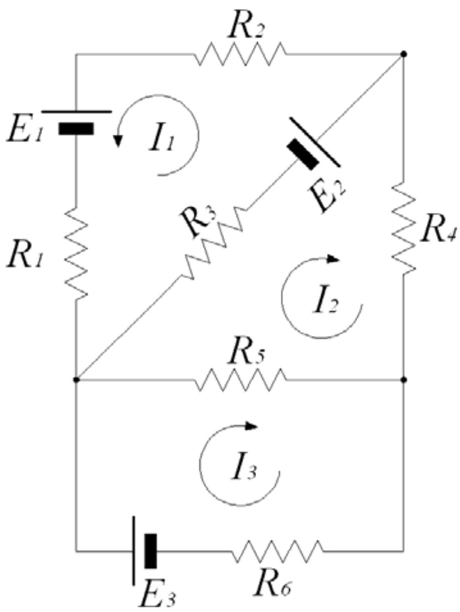


Determinare la potenza dissipata nel circuito di figura sapendo che:

$$E_1 = 6\,\text{V} \quad E_2 = 38\,\text{V} \quad E_3 = 11\,\text{V}$$
$$R_1 = 3\,\text{k}\Omega \quad R_2 = 1\,\text{k}\Omega \quad R_3 = 4\,\text{k}\Omega$$
$$R_4 = 5\,\text{k}\Omega \quad R_5 = 6\,\text{k}\Omega \quad R_6 = 1\,\text{k}\Omega$$

❖

Per calcolare la potenza dissipata dal circuito, dobbiamo determinare le correnti nelle singole resistenze. Risolviamo il circuito con le correnti di maglia adottando l'orientamento di figura:



Possiamo allora scrivere:

$$\begin{cases} \left(R_1 + R_2 + R_3\right) I_1 + R_3 I_2 = E_2 - E_1 \\ R_3 I_1 + \left(R_3 + R_4 + R_5\right) I_2 - R_5 I_3 = E_2 \\ -R_5 I_2 + \left(R_5 + R_6\right) I_3 = E_3 \end{cases}$$

Sostituendo i dati forniti dal problema e considerando la corrente in mA, si ottiene:

$$\begin{cases} 8I_1 + 4I_2 = 32 \\ 4I_1 + 15I_2 - 6I_3 = 38 \\ -6I_2 + 7I_3 = 11 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema utilizziamo il metodo di diagonalizzazione di Gauss-Jordan. Scrivendo la matrice dei coefficienti si ottiene:

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 8 & 4 & 0 & 32 \\ 4 & 15 & -6 & 38 \\ 0 & -6 & 7 & 11 \end{array}\right|$$

dividiamo la prima riga per 2:

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 4 & 2 & 0 & 16 \\ 4 & 15 & -6 & 38 \\ 0 & -6 & 7 & 11 \end{array}\right|$$

sostituiamo la seconda riga sottraendole la prima:

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 4 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 13 & -6 & 22 \\ 0 & -6 & 7 & 11 \end{array}\right|$$

moltiplichiamo la seconda riga per 6 e la terza per 13 e semplifichiamo ulteriormente la prima dividendola per 2:

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 78 & -36 & 132 \\ 0 & -78 & 91 & 143 \end{array}\right|$$

sostituiamo la terza riga sommandola alla seconda e manteniamo come seconda riga la terza (perché più semplice dopo averla nuovamente divisa per 13):

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & -6 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 55 & 275 \end{array}\right|$$

possiamo infine semplificare la terza riga dividendola per 55:

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & -6 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right|$$

Il sistema di partenza risulta così semplificato:

$$\begin{cases} 2I_1 + I_2 = 8 \\ -6I_2 + 7I_3 = 11 \\ I_3 = 5 \end{cases}$$

Quindi:

$$I_3 = 5\,\text{mA}$$

sostituendo I_3 nella seconda si ottiene:

$$I_2 = \frac{7I_3 - 11}{6} = \frac{7 \cdot 5 - 11}{6} = 4\,\text{mA}$$

e infine sostituendo I_2 nella prima si ha:

$$I_1 = \frac{8 - I_2}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2\,\text{mA}$$

Calcoliamo finalmente la potenza dissipata dal circuito:

$$P_D = (R_1 + R_2) I_1^2 + R_3 (I_1 + I_2)^2 + R_4 I_2^2 + R_5 (I_3 - I_2)^2 + R_6 I_3^2$$

Sostituendo i valori considerando le potenze in mW, si ottiene:

$$P_D = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 36 + 5 \cdot 16 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 25 = 16 + 144 + 80 + 6 + 25 = 271\,\text{mW}$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere considerando la potenza fornita dai generatori:

$$^{(*)}P_D = -E_1 I_1 + E_2\left(I_1 + I_2\right) + E_3 I_3$$

(*) la potenza fornita da E_1 è negativa in quanto la corrente è entrante dal polo positivo, pertanto la batteria in questione assorbe potenza invece di cederla.

quindi:

$$P_D = -6\cdot 2 + 38\cdot 6 + 11\cdot 5 = -12 + 228 + 55 = 271\text{mW}$$

P.S. per risolvere il sistema di tre equazioni in tre incognite abbiamo usato il metodo di Gauss-Jordan che a prima vista potrebbe sembrare particolarmente macchinoso; in realtà è l'unico metodo che permette di risolvere agevolmente sistemi con numero maggiore di equazioni e di incognite le cui soluzioni con i metodi tradizionali diventerebbero molto complicate. Inoltre tale metodo è facile da implementare nella progettazione di software di calcolo.