Classe	3^a Elettronici
Materia	T.D.P.
Argomento	Componenti elettrici

Esercizio

Un condensatore a facce piane e parallele ha le armature a forma di triangolo equilatero di lato $l = 10\,cm$ e presenta una capacità in aria $C = 10nF$.

Trascurando l'effetto ai bordi, determinare la distanza *d* fra le armature.

Calcolare inoltre il valore che assume la capacità *C* quando:

a) Un'armatura si sposta di $1\,cm$ rispetto all'altra lungo un lato.

b) Un'armatura si sposta di $1\,cm$ rispetto all'altra lungo un vertice.

$\left(\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{F}{m}\right)$

❖

Come è noto la capacità di un condensatore a facce piane parallele, trascurando l'effetto ai bordi, è data dall'espressione seguente:

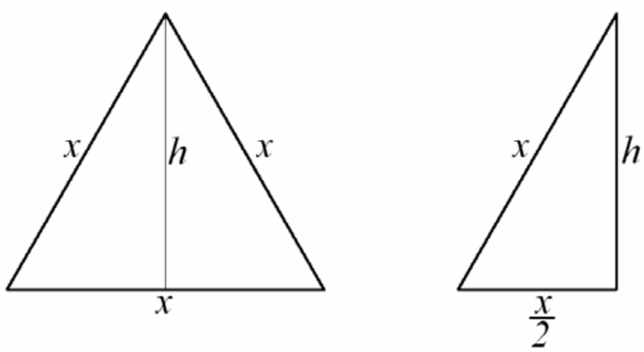
$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \tag{1}$$

dove *A* è l'area delle armature e *d* la distanza fra esse. Dalla (1) si ricava allora:

$$d = \varepsilon_0 \frac{A}{C} \tag{2}$$

Nella (2) dobbiamo determinare prima l'area delle armature a forma triangolare.

L'altezza *h* del triangolo si ricava facilmente con il teorema di Pitagora. Infatti considerando il triangolo rettangolo che si ottiene tagliando in due un generico triangolo equilatero di lato *x*, si ricava:



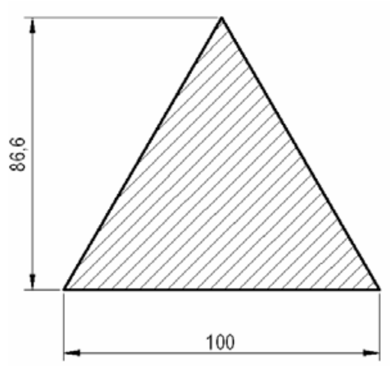
$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \tag{3}$$

Nel nostro caso essendo:

$$x = 100\ mm \tag{4}$$

si ha:

$$h = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 86{,}6\ mm \tag{5}$$



L'area di un'armatura sarà uguale a:

$$A = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 100^2 \cong 4.330{,}13\ mm^2 \tag{6}$$

cioè

$$A \cong 4{,}33 \cdot 10^{-3}\ m^2 \tag{7}$$

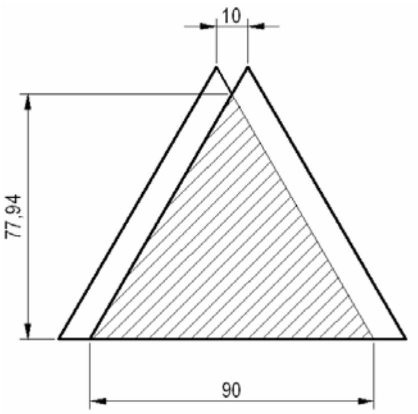
A questo punto possiamo determinare la distanza fra le armature tramite la (2):

$$d = \varepsilon_0 \frac{A}{C} = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{4{,}33 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-9}} \cong 3{,}83 \cdot 10^{-6}\, m \cong 3{,}8\ \mu m \tag{8}$$

Passiamo ora alla seconda parte del problema. Quando un'armatura si sposta rispetto all'altra l'area A da considerare nella (1) si riduce in quanto il campo elettrico interessa esclusivamente le parti effettivamente affacciate.

Nel primo caso spostando lungo un lato un'armatura di $1\,cm$ la parte effettivamente affacciata è sempre un triangolo equilatero ma di lato pari a $9\,cm$ e l'altezza varrà:

$$h_1 = 90 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 77{,}94\,mm \tag{9}$$



L'area utile dell'armatura risulta allora:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 90^2 \cong 3.507{,}4\,mm^2 \cong 3{,}51 \cdot 10^{-3}\ m^2 \tag{10}$$

Nel secondo caso invece l'armatura si sposta rispetto all'altra parallelamente ad un vertice e la situazione è analoga alla precedente ma ciò che si riduce di $1\,cm$ non è la base del triangolo ma la sua altezza, quindi avremo:

$$h_2 = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10 \cong 76{,}6\,mm \tag{11}$$

Per calcolare il valore della base utilizziamo la (3):

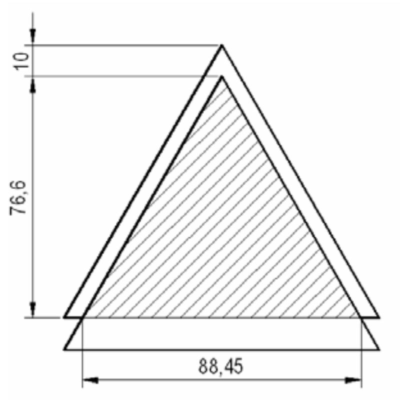
$$h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 \tag{12}$$

da cui

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} h_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10\right) = 100 - 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cong 88{,}45\ mm \tag{13}$$

La superficie delle armature in questo caso vale:

$$A_2 = \frac{x_2 \cdot h_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10\right)^2 \cong 3.387{,}86\ mm^2 \cong 3{,}39 \cdot 10^{-3}\ m^2 \tag{14}$$



Poiché dalla (1) risulta che il valore della capacità è proporzionale all'area delle armature, possiamo determinare il valore di C_1 e C_2 con le seguenti proporzioni:

$$\frac{C}{A} = \frac{C_1}{A_1} = \frac{C_2}{A_2} \tag{15}$$

da cui risulta:

$$C_1 = \frac{A_1}{A} \cdot C = \frac{3{,}51}{4{,}33} \cdot 10^{-8} = 8{,}10\ nF \tag{16}$$

$$C_2 = \frac{A_2}{A} \cdot C = \frac{3{,}39}{4{,}33} \cdot 10^{-8} = 7{,}82\ nF \tag{17}$$