Classe	5ª Elettronici
Materia	Elettronica
Argomento	Esami di Stato

Esame di Stato

a.s. 2002-2003

Un sistema elettronico di registrazione e visualizzazione dell'attività elettrica del cuore è realizzato secondo lo schema a blocchi riportato in figura.

Il segnale elettrico, proveniente dai due elettrodi applicati al paziente, si presenta all'amplificatore in modo differenziale ed ha valore compreso fra -0,8 mV e +0,8 mV con componenti armoniche significative in banda 0,1÷40 Hz. Detto segnale è disturbato dalla tensione di rete a 50 Hz presente nell'ambiente.

Il candidato, fatte le ipotesi aggiuntive ritenute necessarie:

1. spieghi il funzionamento di ciascun blocco dello schema;
2. dimensioni l'amplificatore e determini i parametri di funzionamento del filtro, in modo che sia eliminato il disturbo di rete e all'ingresso del convertitore A/D vi sia un segnale compreso fra -5V e +5V;
3. determini la frequenza di campionamento necessaria per la corretta acquisizione del segnale;
4. indichi il tipo e le caratteristiche di un convertitore A/D adeguato all'impiego nel sistema;
5. identifichi la strumentazione e la modalità con cui collaudare il funzionamento dei primi due blocchi costituenti il sistema;
6. esprima le proprie considerazioni sul tipo di alimentazione necessaria per il funzionamento del sistema.

Prima di passare alla soluzione del problema occorre fare delle considerazioni di carattere pratico.

Innanzitutto bisogna distinguere se optare per una soluzione di carattere scolastico oppure di tipo progettuale. Il problema chiede infatti di realizzare un dispositivo capace di trattare segnali fino alla

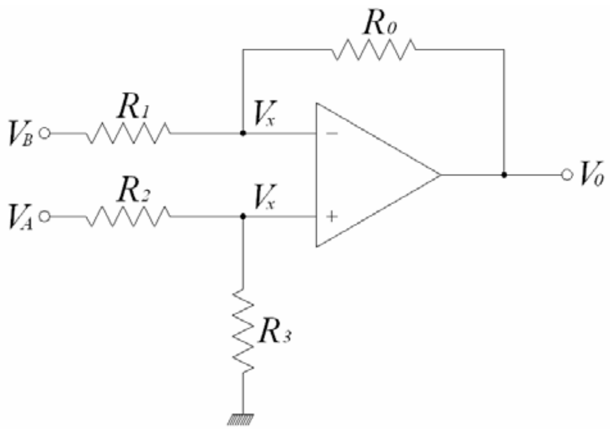
frequenza di 40Hz ma nello stesso tempo richiede che sia addirittura eliminato il disturbo causato dalla frequenza di rete che è a 50Hz.
Un filtraggio di questo tipo è impossibile da realizzare con tecniche analogiche per una serie di ragioni: con i filtri tradizionali un disturbo o un segnale può essere attenuato ma mai eliminato del tutto e l'entità dell'attenuazione dipende oltre che dall'ordine del filtro anche dalla distanza in frequenza della banda utile rispetto al disturbo stesso.
La distanza fra 40Hz e 50Hz in termini di decade è pari a:

$$\log_{10} 50 - \log_{10} 40 = \log_{10} \frac{5}{4} = 0.097 \cong \frac{1}{10}$$

ciò significa che per avere un'attenuazione di -20dB, occorrerebbe un filtro passa-basso con un'attenuazione di ben -200dB/decade cioè un filtro del decimo ordine! Anche se da un punto di vista teorico ciò è possibile utilizzando cinque filtri attivi in cascata del secondo ordine a poli complessi, in realtà si avrebbero seri problemi di stabilità.
Un simile problema allora andrebbe affrontato con tecniche digitali campionando il segnale a frequenza elevata e dai campioni ottenuti ricavare con la Trasformata Discreta di Fourier (DFT) lo spettro del segnale dal quale può essere eliminata l'armonica a 50Hz e con l'antitrasformata di Fourier ricostruire il segnale filtrato.
La DFT richiede per ogni elaborazione un numero di operazioni proporzionale a N^2, dove N è il numero di campioni e si comprende che per avere un'ottima ricostruzione del segnale, N deve essere elevato. Esiste al proposito un'altra tecnica che permette di velocizzare il calcolo della DFT chiamata FFT o Trasformata di Fourier Veloce con la quale il numero di operazioni risultano essere proporzionali a $N \cdot \log_2 N$.
Un'altra possibilità sarebbe quella di utilizzare dei filtri numerici che, invece di affrontare il problema nel dominio della frequenza come accade con la DFT, lavorano direttamente nel dominio del tempo. In questo modo la potenzialità di calcolo si riduce notevolmente ma il progetto del filtro diviene molto complesso. Un esempio di filtri di questo tipo sono i filtri non ricorsivi a risposta finita impulsiva FIR e quelli ricorsivi a risposta impulsiva infinita IIR.
In ogni caso l'implementazione del filtro o l'elaborazione va fatta in un calcolatore e quindi a valle dello schema indicato nella traccia.
Personalmente ritengo che l'autore del problema non volesse da parte degli studenti la soluzione digitale anche perché essa richiede la conoscenza di argomenti che in genere non sono affrontati nei normali corsi ordinari e quantomeno in quelli Sirio.
Viceversa la soluzione analogica, benché dal punto di vista della realizzazione molto problematica, risulta più abbordabile dalla stragrande maggioranza degli studenti e in questo senso svilupperemo la traccia.

❖

Il primo blocco è costituito da un amplificatore differenziale che può essere realizzato secondo lo schema di figura.



Scrivendo le equazioni delle correnti ai nodi invertente e non invertente si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{V_B - V_x}{R_1} = \dfrac{V_x - V_0}{R_0} \\ \dfrac{V_A - V_x}{R_2} = \dfrac{V_x}{R_3} \end{cases} \tag{1}$$

Portando a secondo membro della (1) tutti i termini contenenti la V_x si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{V_B}{R_1} + \dfrac{V_0}{R_0} = V_x \left(\dfrac{1}{R_0} + \dfrac{1}{R_1} \right) \\ \dfrac{V_A}{R_2} = V_x \left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} \right) \end{cases} \tag{2}$$

Indicando con

$$\frac{1}{R_{P-}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1}$$
$$\frac{1}{R_{P+}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

si ricava

$$\begin{cases} R_{P-} \cdot \left(\dfrac{V_B}{R_1} + \dfrac{V_0}{R_0} \right) = V_x \\ R_{P+} \cdot \dfrac{V_A}{R_2} = V_x \end{cases} \tag{3}$$

uguagliando i secondi membri della (3) e risolvendo rispetto a V_0 si determina la funzione di trasferimento del circuito:

$$V_0 = -\frac{R_0}{R_1}V_B + \frac{R_{P+}}{R_{P-}}\frac{R_0}{R_2}V_A \tag{4}$$

se poniamo

$$R_1 = R_2 = R$$
$$R_0 = R_3 = A_D \cdot R$$

allora

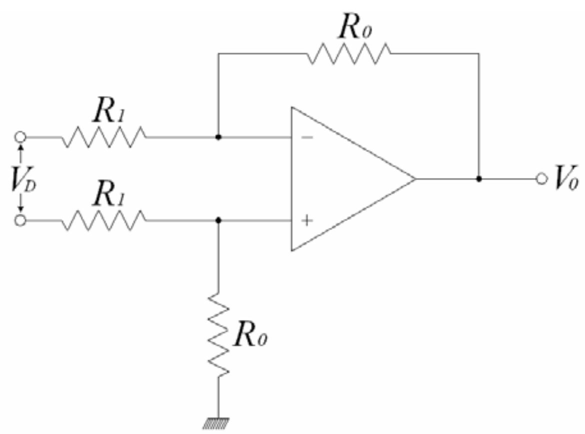
$$R_{P+} = R_{P-}$$

e la (4) diventa

$$V_0 = A_D \cdot V_A - A_D \cdot V_B = A_D \cdot (V_A - V_B) = A_D \cdot V_D \tag{5}$$

dove V_D è la tensione differenziale proveniente dagli elettrodi.

Il circuito diventa allora



dove l'amplificazione differenziale

$$A_D = \frac{R_0}{R_1} \tag{6}$$

sarà determinata in seguito.

Passiamo ora al blocco filtro. Il problema chiede che il filtro abbia una risposta piatta dalla continua fino alla frequenza di 40Hz, ma deve anche eliminare il disturbo dovuto alla frequenza del segnale di rete di 50Hz. Bisogna allora utilizzare uno o più filtri del secondo ordine in cascata a poli complessi. Tale scelta è legata al fatto che come sappiamo alla frequenza di taglio i filtri a poli reali hanno un'attenuazione pari a:

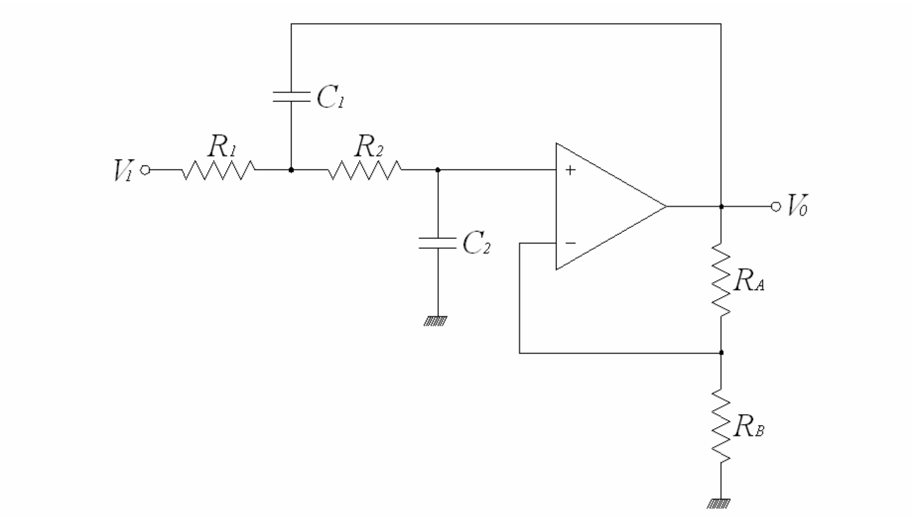
$$\alpha = -3 \cdot n \text{ dB}$$

dove n è l'ordine del polo del filtro. Se per esempio volessimo utilizzare un filtro del quarto ordine avremmo un'attenuazione di -12dB già alla frequenza di 40Hz.

Con i filtri a poli complessi invece si può agire sul fattore di smorzamento per ottenere una risposta quasi piatta fino alla frequenza di taglio ed un buon *roll-off* (pendenza) iniziale.

Esistono due tipi di filtri del secondo ordine a poli complessi: quelli a *reazione semplice* detti anche di Sallen-Key e quelli a *reazione multipla*.

In figura è rappresentato lo schema di un filtro passa-basso a reazione semplice.



La funzione di trasferimento di questo filtro è data dall'espressione seguente:

$$A(s) = \frac{K \dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{\dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} + s\left(\dfrac{1}{R_1 C_1} + \dfrac{1}{R_2 C_1} + \dfrac{1-K}{R_2 C_2}\right) + s^2} \tag{7}$$

dove

$$K = 1 + \frac{R_A}{R_B} \tag{8}$$

se poniamo

$$R_1 = R_2 = R$$
$$C_1 = C_2 = C$$

la (7) diventa

$$A(s)=\frac{K\dfrac{1}{(RC)^2}}{\dfrac{1}{(RC)^2}+s\left(\dfrac{3-K}{RC}\right)+s^2} \tag{9}$$

Mettendo in evidenza tra numeratore e denominatore la quantità

$$\frac{1}{(RC)^2}$$

si ottiene

$$A(s)=\frac{K}{1+RC(3-K)s+(RC)^2s^2} \tag{10}$$

Confrontando la (10) con l'espressione generale di una funzione avente un polo complesso del secondo ordine

$$A(s)=\frac{K}{1+2\zeta\dfrac{s}{\omega_T}+\dfrac{s^2}{\omega_T^2}} \tag{11}$$

dove ω_T è la pulsazione di taglio, risulta

$$\omega_T=\frac{1}{RC} \tag{12}$$

che si può scrivere anche

$$f_T=\frac{1}{2\pi RC} \tag{13}$$

e

$$2\zeta=3-K \tag{14}$$

A questo punto dobbiamo decidere quanti filtri (*celle*) utilizzare in cascata per ottenere la risposta richiesta dal problema.

Esistono al proposito diverse tecniche di approssimazione che privilegiano alcune caratteristiche della risposta in frequenza rispetto ad altre. Le più note sono le approssimazioni con polinomi di:

- Butterworth
- Chebyschev
- Bessel
- Cauer

In questo esercizio useremo l'approssimazione di Butterworth che garantisce la migliore risposta piatta in banda passante, un discreto roll-off e presenta un'attenuazione di -3dB alla frequenza di taglio (40Hz nel nostro caso) qualunque sia l'ordine del filtro.

I polinomi di Butterworth da utilizzare al denominatore della (10) sono disponibili in forma normalizzata, cioè calcolati per una pulsazione unitaria e valgono:

Ordine	Polinomio di Butterworth
1	$s+1$
2	$s^2+1.414s+1$
3	$(s^2+s+1)(s+1)$
4	$(s^2+0,765s+1)(s^2+1,848s+1)$
5	$(s^2+0,618s+1)(s^2+1,618s+1)(s+1)$
6	$(s^2+0,518s+1)(s^2+1,414s+1)(s^2+1,932s+1)$

Tralasciamo i filtri di ordine dispari e prendiamo in considerazione solo quelli pari. Come possiamo osservare varia solo il termine lineare di *s* che è pari a 2ζ essendo $\omega_T=1$.

Per calcolare i coefficienti del polinomi alla frequenza di 40Hz cioè alla pulsazione

$$\omega_T=2\pi f_T=80\pi$$

è sufficiente dividere i termini in *s* per ω_T.

Abbiamo allora:

<u>*2° ordine*</u>

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{80\pi}\right)^2+1,414\frac{s}{80\pi}+1} \qquad (15)$$

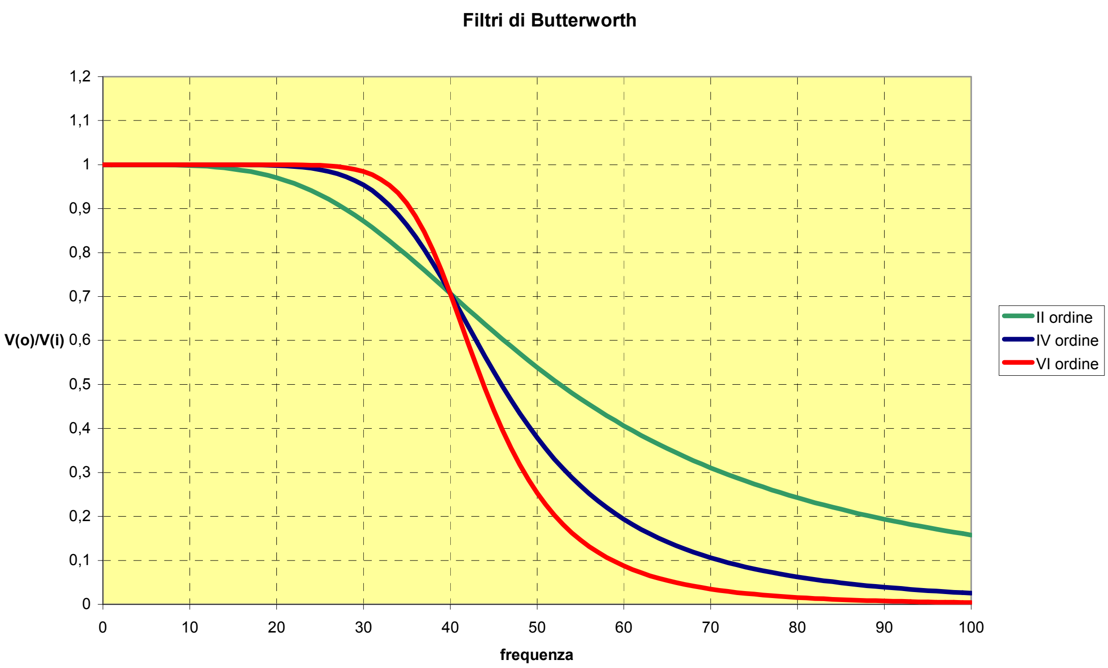
4° ordine
$$\frac{1}{\left(\frac{s}{80\pi}\right)^2+0{,}765\frac{s}{80\pi}+1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{80\pi}\right)^2+1{,}848\frac{s}{80\pi}+1} \qquad (16)$$

6° ordine
$$\frac{1}{\left(\frac{s}{80\pi}\right)^2+0{,}518\frac{s}{80\pi}+1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{80\pi}\right)^2+1{,}414\frac{s}{80\pi}+1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{80\pi}\right)^2+1{,}932\frac{s}{80\pi}+1} \qquad (17)$$

Il modulo della f.d.t. di ogni fattore presente nelle (15), (16) e (17) in funzione della frequenza f è dato da:

$$|A(f)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{f^2}{40^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{f}{40}\right)^2}} \qquad (18)$$

Riportando con Excel su un grafico l'andamento del modulo dei tre filtri si ha la risposta di figura



Come possiamo osservare alla frequenza di 40Hz l'uscita vale 0,707 con un'attenuazione di circa il 30% (-3dB) per tutti i filtri.

Alla frequenza di 50Hz abbiamo invece:

Ordine	Modulo	Attenuazione
2	0,539	46% ≈ -5,4dB
4	0,379	62% ≈ -8,4dB
6	0,253	75% ≈ -11,9dB

Per avere una buona attenuazione scegliamo la soluzione a tre celle filtranti (filtro del 6° ordine) e determiniamo i parametri.
Dalla (13) si ha:

$$RC = \frac{1}{2\pi f_T} = \frac{1}{80\pi} \cong 4 \cdot 10^{-3} = 4\ \text{ms} \tag{19}$$

Ponendo ad esempio

$$R = 40\ \text{k}\Omega \tag{20}$$

otteniamo

$$C = 100\ \text{nF} \tag{21}$$

Dalla (14) otteniamo poi

$$\begin{cases} 3 - K_1 = 0{,}518 \\ 3 - K_2 = 1{,}414 \\ 3 - K_3 = 1{,}932 \end{cases} \tag{22}$$

ovvero

$$\begin{cases} K_1 = 2{,}482 \\ K_2 = 1{,}586 \\ K_3 = 1{,}068 \end{cases} \tag{23}$$

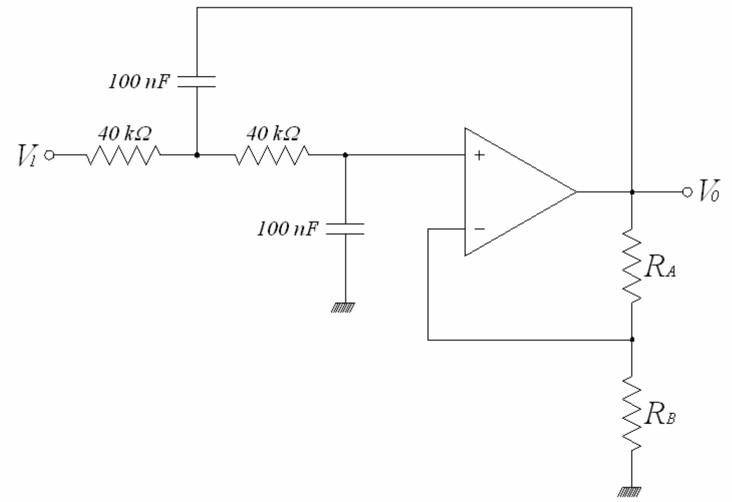
e infine ricordando la (8)

$$\begin{cases} \dfrac{R_{A1}}{R_{B1}} = 1{,}482 \\ \dfrac{R_{A2}}{R_{B2}} = 0{,}586 \\ \dfrac{R_{A3}}{R_{B3}} = 0{,}068 \end{cases} \tag{24}$$

Le (24) si possono ottenere approssimativamente dai seguenti valori di resistenza:

$$\begin{matrix} R_{A1} = 15k\Omega & R_{A2} = 10k\Omega & R_{A3} = 17k\Omega \\ R_{B1} = 10k\Omega & R_{B2} = 17k\Omega & R_{B3} = 250k\Omega \end{matrix} \tag{25}$$

Con tutti i parametri trovati le tre celle filtranti saranno del tipo seguente con i valori di R_A ed R_B forniti dalle (25)



Determiniamo ora il valore dell'amplificazione di tutto il circuito. Dalle specifiche del problema risulta:

$$A_{Totale} = \frac{5}{0,8 \cdot 10^{-3}} = 6250$$

Dalle (23) risulta inoltre che l'amplificazione totale dei tre filtri attivi vale:

$$A_{Filtri} = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 = 4,20 \tag{26}$$

Quindi dovrebbe essere:

$$A_{Totale} = A_D \cdot A_{Filtri} = 6250 \tag{27}$$

cioè

$$A_D = \frac{A_{Totale}}{A_{Filtri}} = \frac{6250}{4,20} \cong 1488 \tag{28}$$

Un valore troppo elevato per essere ottenuto con il solo amplificatore differenziale. Essendo

$$1488 = 48 \cdot 31$$

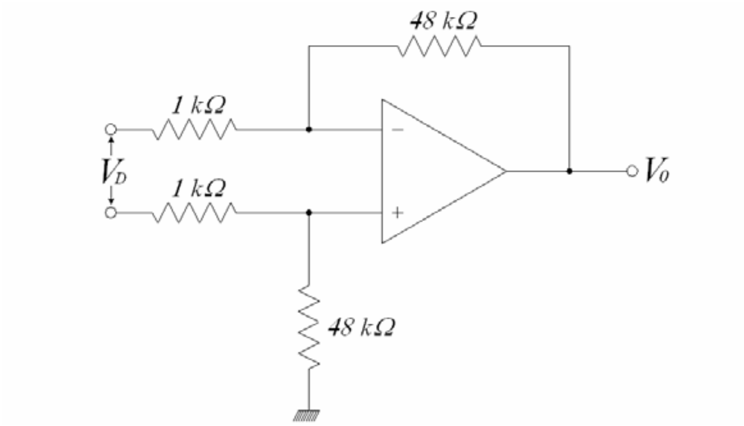
possiamo fare in modo che

$$A_D = \frac{R_0}{R_1} = 48 \tag{29}$$

cioè

$$\begin{cases} R_0 = 48k\Omega \\ R_1 = 1k\Omega \end{cases}$$

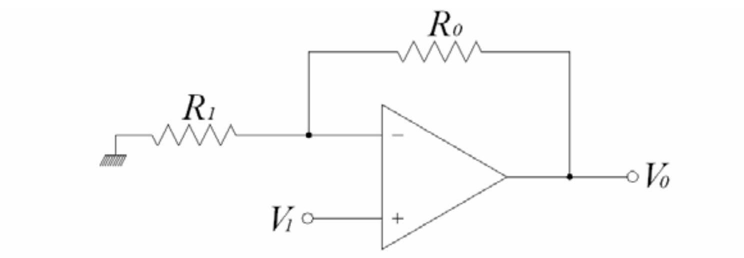
e l'amplificatore differenziale così dimensionato diventa



Bisogna infine aggiungere un ulteriore amplificatore che abbia amplificazione

$$A = 31$$

Se utilizziamo un amplificatore operazionale in configurazione non-invertente come in figura



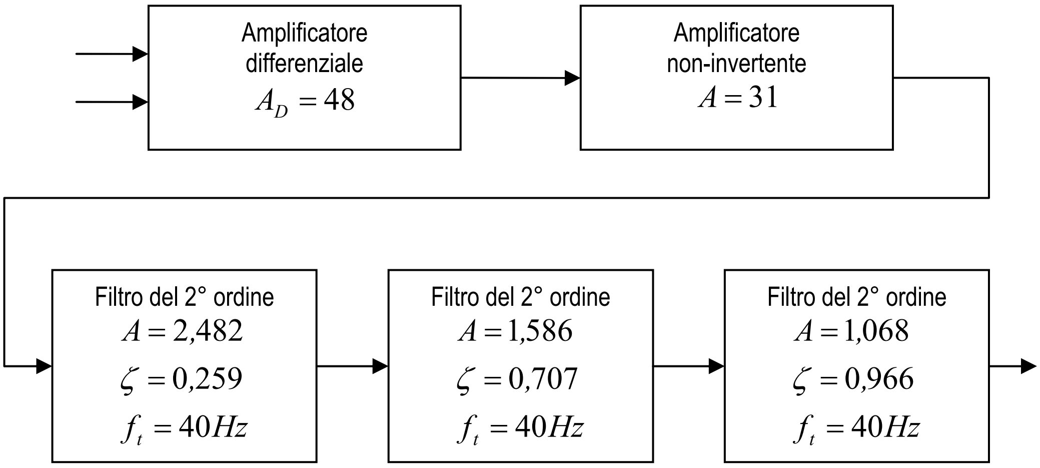
essendo

$$A = 1 + \frac{R_0}{R_1} \tag{30}$$

il valore desiderato di amplificazione si ottiene con

$$\begin{cases} R_0 = 30k\Omega \\ R_1 = 1k\Omega \end{cases}$$

Riassumendo tramite uno schema blocchi si ha:



Passiamo ora al convertitore analogico-digitale. La conversione A/D, com'è noto, può essere fatta in diversi modi che dipendono essenzialmente dalla banda utile del segnale da convertire. Esistono tre tipologie che richiedono, in termini di impulsi di clock, tempi diversi di conversione in base al numero N di bit del convertitore.

Tipo	**Tempo di conversione (n_{ck})**
Flash	1
Approssimazioni successive	N
Conteggio	2^N
Integrazione	2^N

Come si vede dalla tabella, il convertitore A/D flash, richiede un solo impulso di clock, ma è molto complesso ed è disponibile in forma integrata con un limitato numero di bit. Quelli a conteggio e ad integrazione sono invece molto lenti per un numero elevato di bit. Il convertitore A/D ad approssimazioni successive invece costituisce un ottimo compromesso in termini di velocità e risoluzione.

In questo caso il segnale da inviare al convertitore ha una banda molto limitata e poiché la frequenza di campionamento per il teorema di Shannon deve essere almeno pari a

$$f_c \geq 2 \cdot f_{max} = 80 \text{ Hz} \tag{31}$$

ciò significa che il tempo di conversione deve essere inferiore a

$$T_c \leq \frac{1}{80} = 12{,}5 \text{ ms} \tag{32}$$

Inoltre per assicurare una buona risoluzione del segnale di uscita possiamo pensare di usare un convertitore A/D a 12 bit. In tal caso essendo la dinamica di ingresso compresa tra ±0,8mV allora la risoluzione sarà:

$$V_R = \frac{V_{i\,max} - V_{i\,min}}{2^N} = \frac{0{,}8 + 0{,}8}{2^{12}} \cdot 10^{-3} \cong 0{,}4\,\mu\text{V} \qquad (32)$$

Esistono in commercio diversi dispositivi integrati che realizzano la conversione A/D con le caratteristiche di cui sopra; un esempio è il convertitore della Maxim MAX176 le cui caratteristiche sono:

- 12 bit di risoluzione
- Tempo massimo di conversione: 3,5μs
- Ingresso differenziale: ±5V
- Frequenza di campionamento: 3MHz o 4MHz
- Uscita seriale
- Tensione di alimentazione da +5V a -12V÷-15V
- Contenitore DIP a 8 pin

A questo punto resta da determinare la strumentazione e la modalità con cui collaudare gli amplificatori ed il blocco dei filtri. Innanzitutto bisogna disporre di un generatore di funzioni a bassa frequenza che fornisca il segnale di prova e, date le frequenze in gioco, di un oscilloscopio con memoria.
L'alimentazione da fornire al circuito deve essere di tipo duale a ±12V.