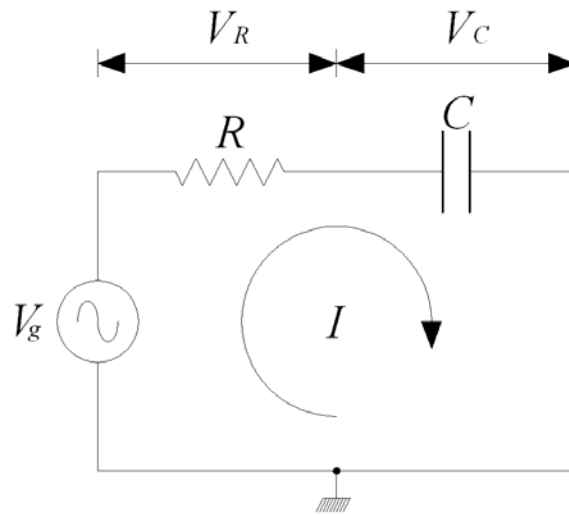


I FILTRI PASSIVI

Rete RC serie



Consideriamo la rete RC di figura e scriviamo l'equazione della corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (1.1)$$

Semplificando tale espressione si ottiene:

$$\bar{I} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} \bar{V}_g \quad (1.2)$$

Nota la corrente possiamo determinare la tensione ai capi della resistenza e del condensatore, si ottiene quindi:

$$\bar{V}_R = R \cdot \bar{I} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \bar{V}_g \quad (1.3)$$

e

$$\bar{V}_C = \frac{\bar{I}}{j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \bar{V}_g \quad (1.4)$$

Definiamo *pulsazione di taglio* la quantità:

$$\omega_t = \frac{1}{RC} \quad (1.5)$$

Le (1.3) e (1.4) diventano allora:

$$\overline{V}_R = \frac{j\omega / \omega_t}{1 + j\omega / \omega_t} \overline{V}_g \quad (1.6)$$

$$\overline{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_t} \overline{V}_g \quad (1.7)$$

Calcoliamo modulo e fase delle (1.6) e (1.7) rispetto alla V_g :

$$\rho_R = \frac{\omega / \omega_t}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_t)^2}} \quad (1.8)$$

$$\varphi_R = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega / \omega_t) \quad (1.9)$$

e

$$\rho_C = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_t)^2}} \quad (1.10)$$

$$\varphi_C = -\arctan(\omega / \omega_t) \quad (1.11)$$

Vediamo cosa succede al variare della pulsazione ω rispetto a ω_t

	ρ_R	φ_R	ρ_C	φ_C
$\omega \rightarrow 0$	0	90°	1	0
$\omega = 0.1\omega_t$	0.0995	84.29°	0.9950	-5.71°
$\omega = \omega_t$	0.7071	45	0.7071	-45
$\omega = 10\omega_t$	0.9950	5.71°	0.0995	-84.29°
$\omega \rightarrow \infty$	1	0	0	-90°

Dall'analisi della tabella precedente si vede che le tensioni ai capi della resistenza e del condensatore hanno un comportamento opposto. La resistenza presenta tensione nulla da pulsazioni bassissime fino ad un decimo della pulsazione di taglio e cresce da questo punto in poi raggiungendo il 99,5% della tensione di ingresso ad una pulsazione di circa dieci volte quella di taglio (passa-alto) mentre sul condensatore si verifica esattamente l'opposto (passa-basso). La fase varia invece tra 90° e 0° e tra 0° e -90° rispettivamente. Alla pulsazione di taglio le due tensioni hanno modulo uguale e pari a circa il 70% (-3dB) del valore massimo con uno sfasamento di 45° in anticipo per la V_R e di 45° in

ritardo per la V_C . I due grafici sottostanti mostrano l'andamento del modulo e della fase delle tensioni considerate al variare della pulsazione ω in un intorno di ω_t pari ad una decade.

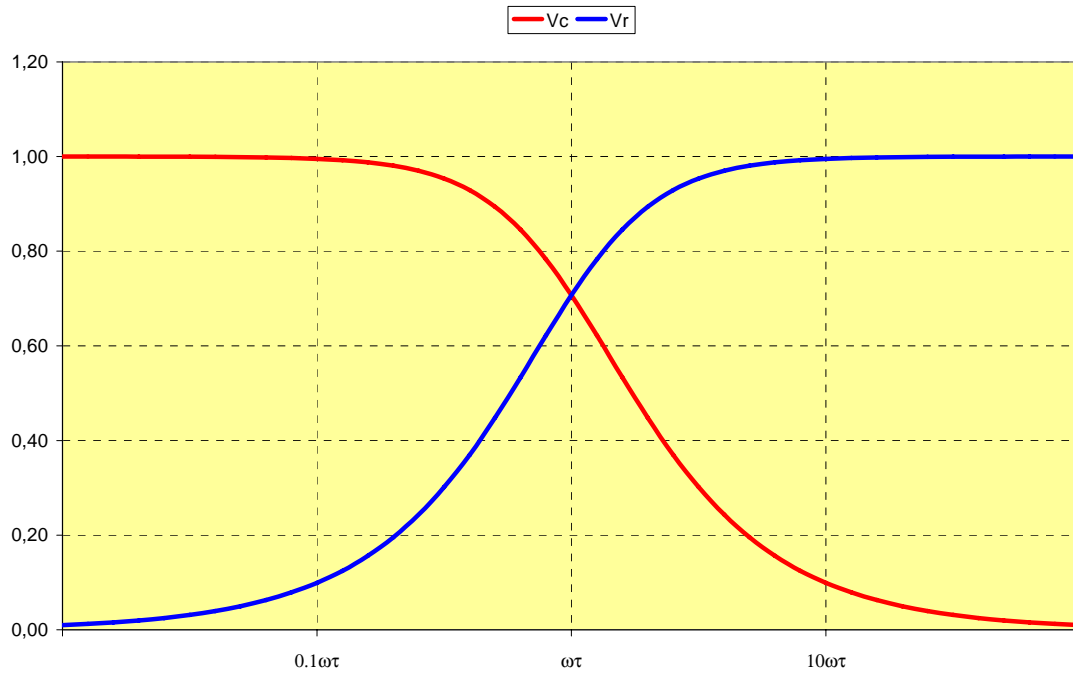


Diagramma dei moduli

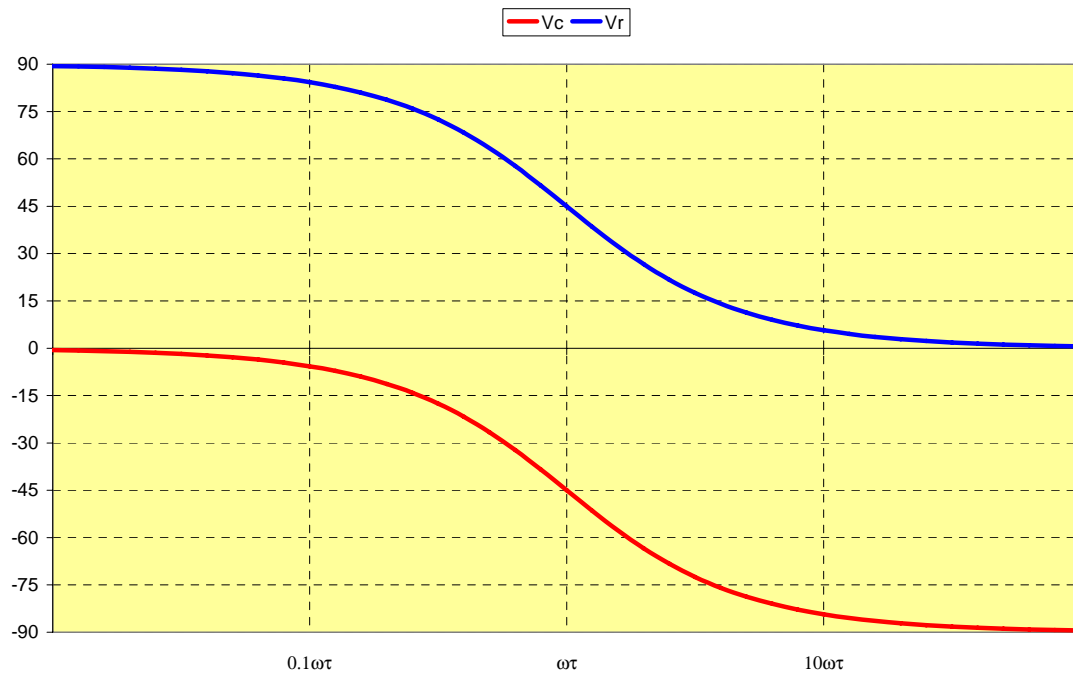
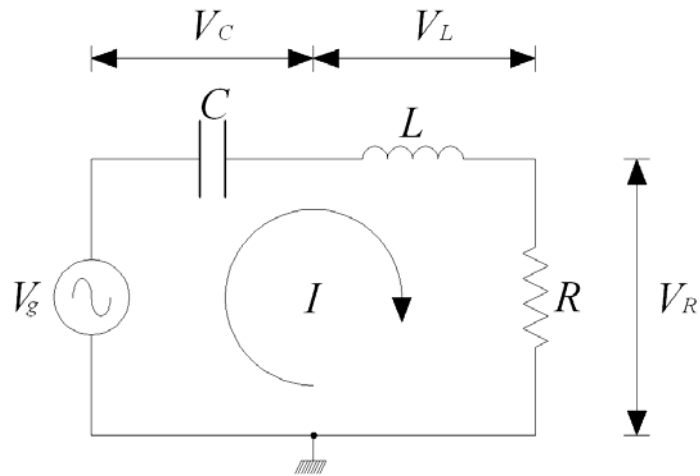


Diagramma delle fasi

Rete RLC serie



Consideriamo ora la rete RLC di figura e procediamo come nel caso precedente determinando prima la corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (1.12)$$

Semplificando tale espressione si ottiene:

$$\bar{I} = \frac{j\omega C}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC} \bar{V}_g \quad (1.13)$$

Nota la corrente possiamo determinare la tensione ai capi della resistenza, dell'induttanza e del condensatore, si ottiene quindi:

$$\bar{V}_R = R \cdot \bar{I} = \frac{j\omega RC}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC} \bar{V}_g \quad (1.14)$$

$$\bar{V}_L = j\omega L \cdot \bar{I} = \frac{-\omega^2 LC}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC} \bar{V}_g \quad (1.15)$$

$$\bar{V}_C = \frac{\bar{I}}{j\omega C} = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC} \bar{V}_g \quad (1.16)$$

Definiamo *pulsazione di risonanza* il termine:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.17)$$

e *fattore di merito* la quantità:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (1.18)$$

Si ha quindi

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} \quad (1.19)$$

e

$$RC = \frac{1}{\omega_0 Q} \quad (1.20)$$

Sostituiamo le (1.20) e (1.21) nelle (1.15), (1.16) e (1.17)

$$\bar{V}_R = \frac{j\omega / \omega_0}{Q(1 - \omega^2 / \omega_0^2) + j\omega / \omega_0} \bar{V}_g \quad (1.21)$$

$$\bar{V}_L = \frac{-\omega^2 / \omega_0^2}{Q(1 - \omega^2 / \omega_0^2) + j\omega / \omega_0} Q \bar{V}_g \quad (1.22)$$

$$\bar{V}_C = \frac{1}{Q(1 - \omega^2 / \omega_0^2) + j\omega / \omega_0} Q \bar{V}_g \quad (1.23)$$

Calcoliamo modulo e fase delle espressioni precedenti rispetto alla V_g :

$$\rho_R = \frac{\omega / \omega_0}{\sqrt{Q^2(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2 + (\omega / \omega_0)^2}} \quad (1.24)$$

$$\varphi_R = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega / \omega_0}{Q(1 - \omega^2 / \omega_0^2)}\right) \quad (1.25)$$

$$\rho_L = \frac{\omega^2 / \omega_0^2}{\sqrt{Q^2(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2 + (\omega / \omega_0)^2}} Q \quad (1.26)$$

$$\varphi_L = \pi - \arctan\left(\frac{\omega / \omega_0}{Q(1 - \omega^2 / \omega_0^2)}\right) \quad (1.27)$$

$$\rho_C = \frac{Q}{\sqrt{Q^2(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2 + (\omega / \omega_0)^2}} \quad (1.28)$$

$$\varphi_C = -\arctan\left(\frac{\omega / \omega_0}{Q(1 - \omega^2 / \omega_0^2)}\right) \quad (1.29)$$

Vediamo cosa succede al variare della pulsazione ω rispetto a ω_0 ^(*)

	ρ_R	φ_R	ρ_L	φ_L	ρ_C	φ_C
$\omega \rightarrow 0$	0	90°	0	180°	1	0
$\omega = \omega_0$	1	0	Q	90°	Q	-90°
$\omega \rightarrow \infty$	0	-90°	1	0°	0	-180°

(*) anche se la funzione arcotangente è definita tra -90° e +90° nel nostro caso siamo tra 0° e 180° pertanto $\arctan(0^+) \rightarrow 0^\circ$ mentre $\arctan(0^-) \rightarrow 180^\circ$

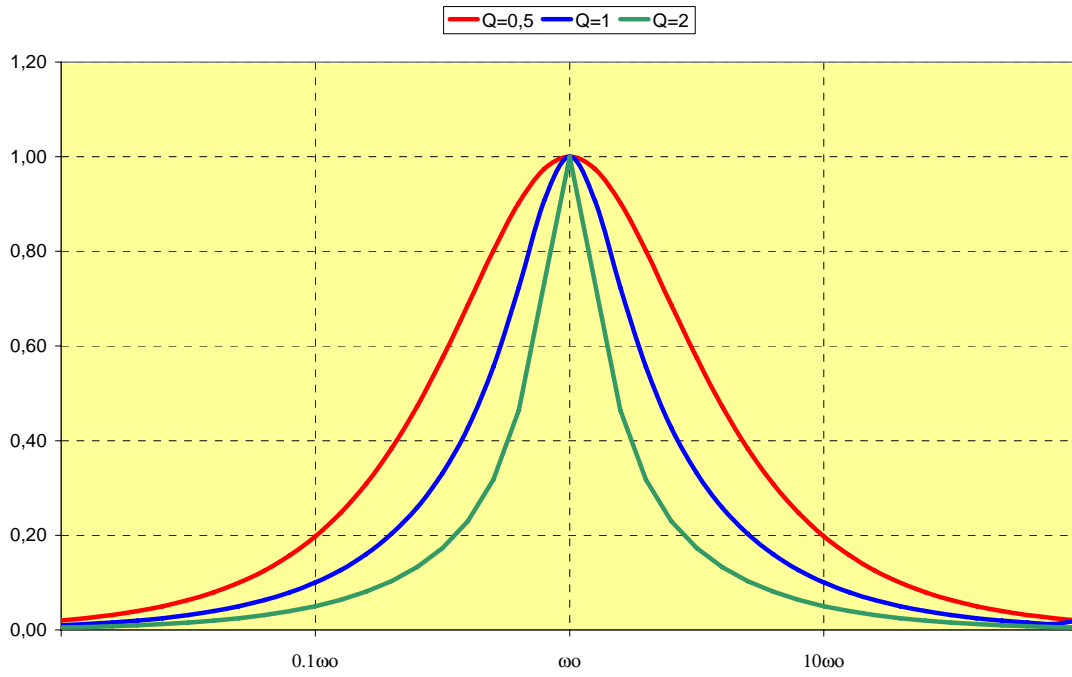
Il parametro Q è detto anche *coefficiente di sovratensione*.

Guardando i risultati in tabella, si comprende che la tensione ai capi della resistenza è massima alla pulsazione di risonanza ω_0 e man mano che ci si allontana da tale valore scende fino ad annullarsi; la fase invece varia tra -90° e +90°. Pertanto sulla resistenza il circuito si comporta come un filtro passa-banda e alla pulsazione di risonanza il comportamento del circuito è puramente resistivo.

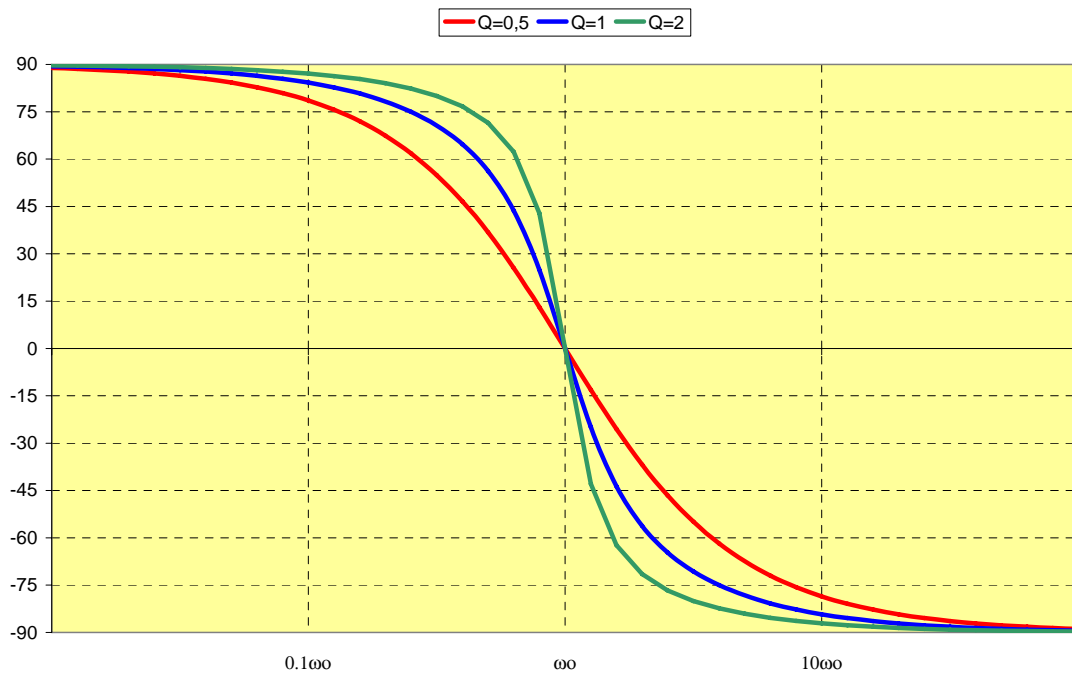
Sul condensatore e sull'induttore, il comportamento è opposto. Alle basse frequenze sul condensatore la tensione coincide con quella del generatore e poi diminuisce dopo la pulsazione di risonanza (passa-basso). Sull'induttore si verifica invece il contrario (passa-alto). Alla pulsazione di risonanza il valore di tensione può essere addirittura maggiore di quello del generatore (extra-tensione) e dipende dal fattore di merito Q del circuito (valori tipici sono 50÷100).

I grafici sottostanti mostrano l'andamento del modulo e della fase delle tensioni considerate al variare di Q e della pulsazione ω in un intorno di ω_0 pari ad una decade.

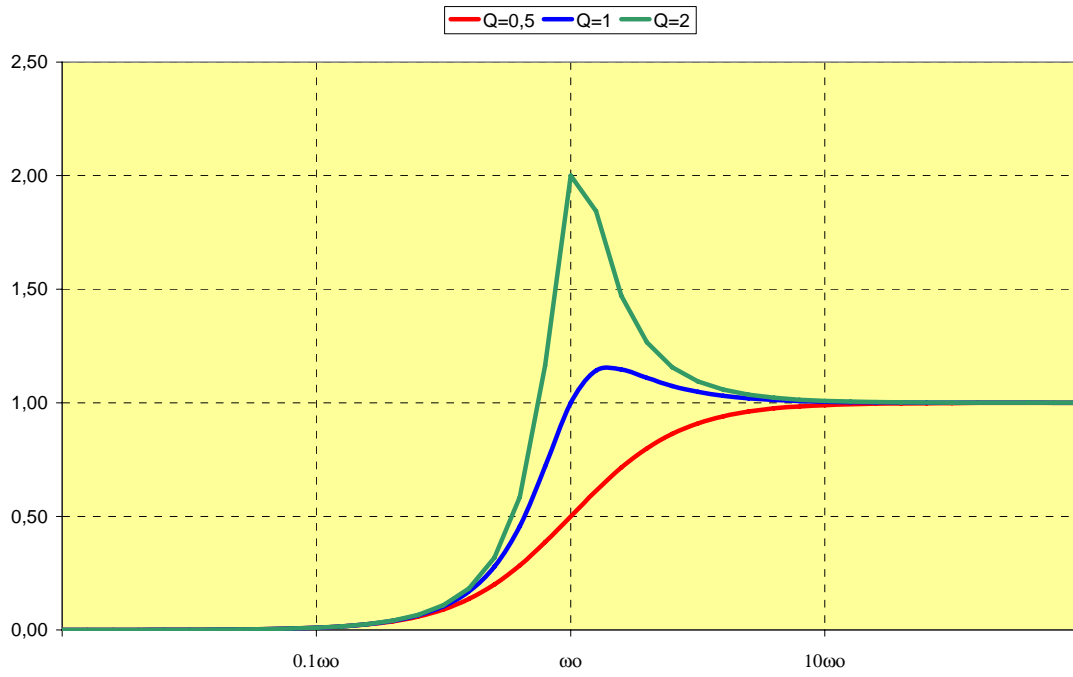
I valori di Q rappresentati sono bassi (0,5-1-2), ma i grafici lasciano intuire come la selettività del circuito aumenti all'aumentare di tale valore



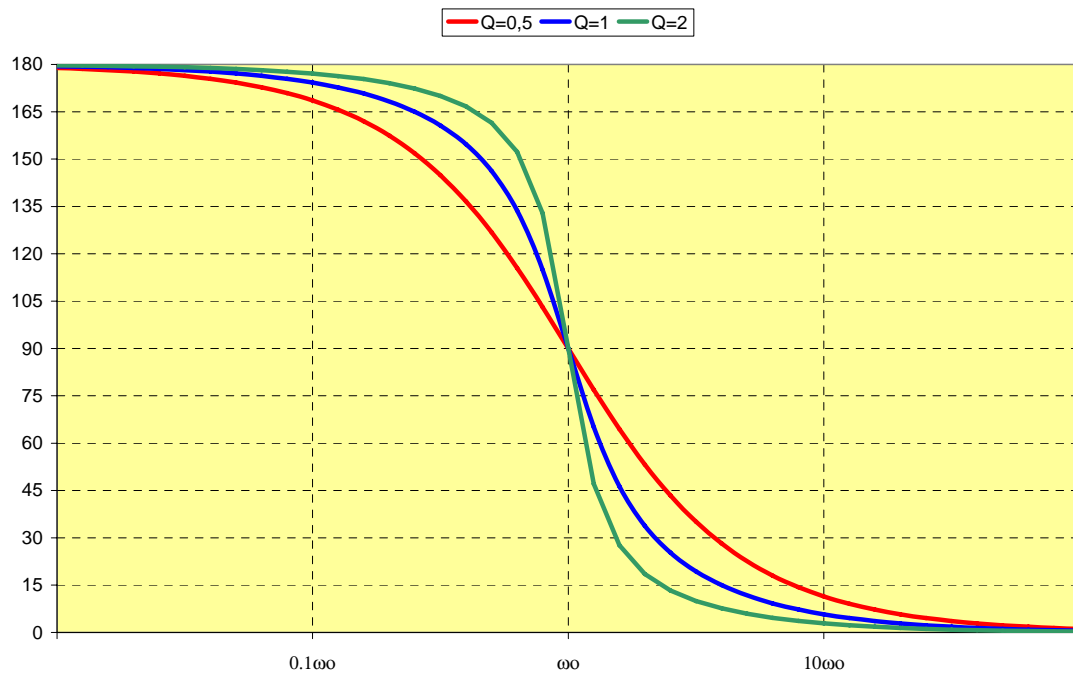
Andamento del modulo su R



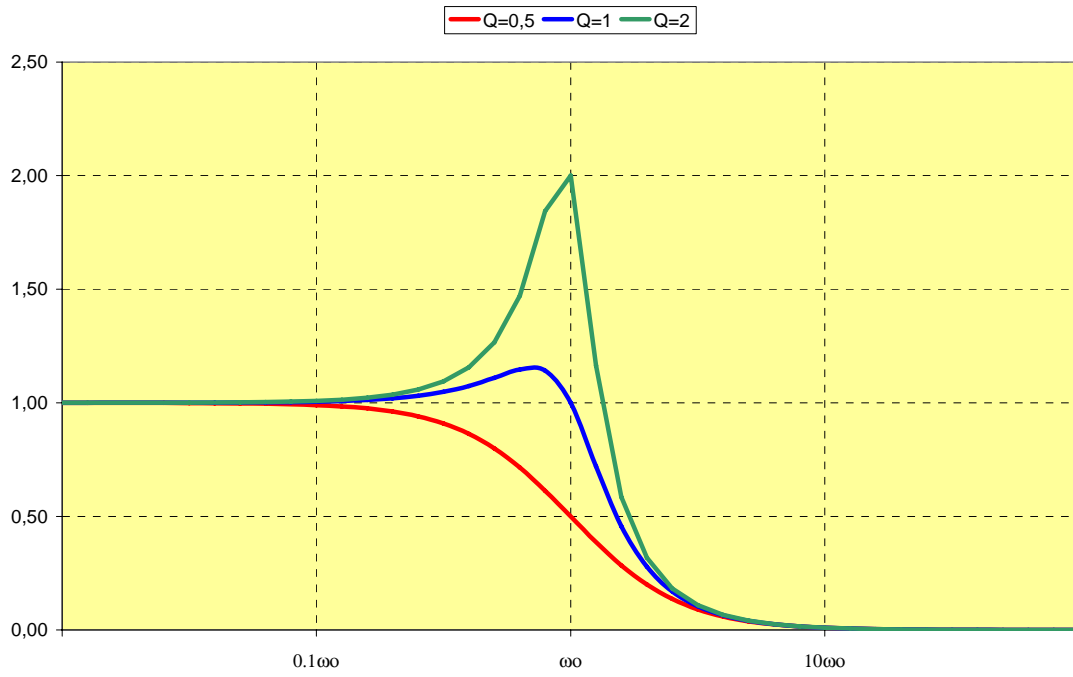
Andamento della fase su R



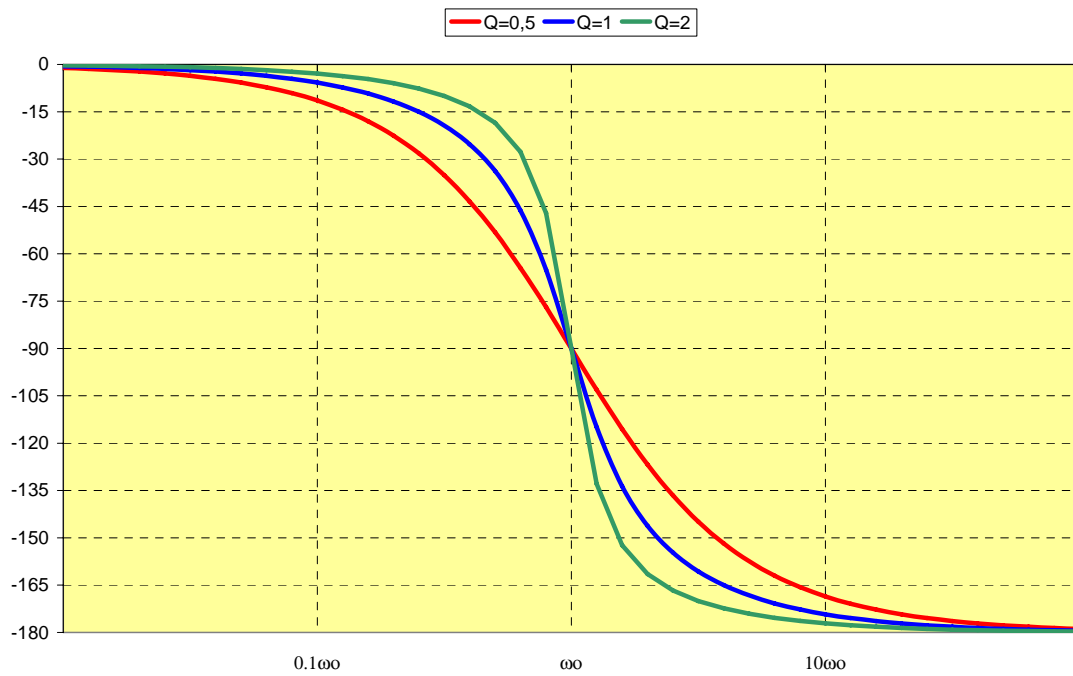
Andamento del modulo su L



Andamento della fase su L



Andamento del modulo su C



Andamento della fase su C

In questo filtro l'elemento da considerare è la tensione ai capi della resistenza a causa del suo comportamento selettivo al variare della pulsazione.

In un filtro passa-banda, oltre alla pulsazione di risonanza è di interesse anche la larghezza della banda passante.

Quando abbiamo parlato di pulsazione di taglio di un filtro passa-basso o passa-alto, abbiamo detto che a tale valore l'ampiezza della grandezza di interesse, deve essere pari a circa il 70% (-3dB) del valore massimo, anzi per la precisione deve essere:

$$V_{\omega_t} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} V_{max} \quad (1.30)$$

Trattandosi di un passa-banda, dovremo avere due pulsazioni di taglio una *inferiore* ed una *superiore* nell'intorno di ω_0 . Per determinarle applichiamo lo stesso ragionamento al filtro RLC; cioè calcoliamo i valori per i quali

$$\rho_R = \frac{\omega / \omega_0}{\sqrt{Q^2 (1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2 + (\omega / \omega_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.31)$$

poniamo

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (1.32)$$

si ha:

$$\frac{x}{\sqrt{Q^2 (1 - x^2)^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.33)$$

mettendo in evidenza x al denominatore si ottiene:

$$\frac{1}{\sqrt{Q^2 \left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.34)$$

Uguagliando i denominatori si ha:

$$Q^2 \left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2 = 1 \quad (1.35)$$

Effettuando la radice quadrata ad ambo i membri si ottiene:

$$Q \frac{1-x^2}{x} = \pm 1 \quad (1.36)$$

Con opportuni passaggi si ha:

$$Qx^2 \mp x - Q^2 = 0 \quad (1.37)$$

Separando la (1.37), si ottengono due equazioni di secondo grado:

$$\begin{aligned} Qx^2 - x - Q^2 &= 0 \\ Qx^2 + x - Q^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{1+4Q^2} + 1}{2Q} \\ x_2 &= \frac{\sqrt{1+4Q^2} - 1}{2Q} \end{aligned} \quad (1.39)$$

avendo tralasciato le soluzioni negative in quanto x è sempre positiva per la (1.32). Dato che per le (1.38) risulta

$$x_1 > x_2 \quad (1.40)$$

sostituendo la (1.32), si ottengono le due pulsazioni di taglio cercate

$$\begin{aligned} \omega_{ts} &= \frac{\sqrt{1+4Q^2} + 1}{2Q} \omega_0 \\ \omega_{ti} &= \frac{\sqrt{1+4Q^2} - 1}{2Q} \omega_0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

La larghezza di banda del filtro è data da:

$$B = \omega_{ts} - \omega_{ti} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (1.42)$$

Ed è tanto più stretta, quanto maggiore è il valore di Q .

Un'ultima curiosità. Se calcoliamo la pulsazione di centro banda come media aritmetica tra le due pulsazioni di taglio si ottiene:

$$\omega_{centrale} = \frac{\omega_{ts} + \omega_{ti}}{2} = \frac{\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \omega_0 > \omega_0 \quad (1.43)$$

Osservando la (1.43), si nota che la banda passante *non è simmetrica* rispetto alla pulsazione di risonanza ω_0 , ma è leggermente spostata verso la pulsazione di taglio superiore; tuttavia essendo nei casi pratici $Q \gg 1$ questa asimmetria è irrilevante e le due pulsazioni praticamente coincidono.

Ad esempio se

$$Q = 50$$

Si ha:

$$\omega_{centrale} = \frac{\sqrt{1+10.000}}{100} \omega_0 = 1,00005 \omega_0 \approx \omega_0$$

www.carlocalo.it